ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Begründet von W. SÜSS

Herausgegeben in Verbindung mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach

von R. BAER · H. KNESER

Beirat: G. Bol, E. Bompiani, J. Dieudonné, Ch. Ehresmann, W. Feller, H. Görtler, H. Hadwiger, H. Hopf, H. König, S. MacLane, W. Magnus, T. Nagell, Chr. Pauc, G. Pickert, D. Puppe, K. Reidemeister, P. Roquette, H. Salzmann, J. A. Schouten, H. Seifert, E. Sperner, E. Stiefel, P. Turán, K. Zeller

Schriftleitung: E. Lamprecht

INHALT – CONTENTS – SOMMAIRE

ARCH. MATH.	VOL. XII	FASC. 6	PAG. 401–480	31. XII. 1961

IRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES OF MATHEMATICS — ARCHIVES MATHEMATIQUES

Adresse der Redaktion: Würzburg (Deutschland), Klinikstraße 6

Das *Archiv der Mathematik* erscheint regelmäßig alle 2 Monate mit jährlich 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt für den ganzen Band Fr. 66.— (DM 66.—) und für das Einzelheft Fr. 14.— (DM 14.—). Mitglieder einer der nachstehend genannten Gesellschaften erhalten hierauf 20% Rabatt: *Canadian Mathematical Congress · Deutsche Mathematiker-Vereinigung · Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik · Het Wiskundig Genootshap te Amsterdam · Indian Mathematical Society · Matematisk Forening i Kobenhavn · Norsk Matematisk Forening · Österreichische Mathematische Gesellschaft · Polskie Towarystwo Matematyczne · Schweizerische Mathematische Gesellschaft · Sociedad Matemática Española · Société Mathématique de France · The American Mathematical Society · The Edinburgh Mathematical Society · The London Mathematical Society · The Mathematical Association of America · Unión Matematica Argentina · Unione Matematica Italiana.*

Veröffentlicht werden in erster Linie *Originalarbeiten* aus dem Gesamtgebiet der *Mathematik* und ihrer unmittelbaren Anwendungen. In beschränktem Maße können auch *Selbstreferate* über bislang unveröffentlichte größere Arbeiten, deren wissenschaftliche Bedeutung dies gerechtfertigt erscheinen läßt, Aufnahme finden. In diesen Selbstreferaten müssen außer den Resultaten die wesentlichen Schritte der Beweisführung mitgeteilt werden. Schließlich gelangen in zwangloser Folge *Zusammenfassende Berichte* über die Fortschritte einzelner Sondergebiete, die in rascher Entwicklung begriffen sind, mit ausführlichen Literaturangaben zum Abdruck.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache abgefaßt sein und sollen an Umfang 10 Druckseiten nicht überschreiten. Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln einzureichen und ihnen separat eine «Anweisung für den Setzer» beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz, Kleindruck und griechische, Fraktur-, Antiqua- und sonstige Typen durch farbige Unterstreichungen kenntlich gemacht sind. Die Vorlagen für Abbildungen müssen reproduktionsfertig und mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden. Beschriftung der Abbildung jedoch nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier. Nicht durch die Druckerei verschuldete Autorkorrekturen, welche 10% der reinen Satzkosten übersteigen, werden den betreffenden Autoren belastet.

Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht. Den Verfassern werden 75 Separata ohne Umschlag gratis überlassen; weitere Fortdrucke bzw. Umschläge für Separata, sofern ihre Bestellung bei Rückgabe der Korrektur aufgegeben wird, können gegen folgende Berechnung geliefert werden: Je 25 Fortdrucke DM 0,80 pro Seite (ohne Umschlag); erste 25 Umschläge DM 18.—, je weitere 25 Umschläge DM 6.—.

Redaktionsschluß spätestens 3 Monate vor Erscheinungstermin des jeweiligen Heftes. Sämtliche *Zuschriften* sind an die obengenannte Adresse der Redaktion erbeten.

Inserate: 1/1 Seite Fr. (DM) 175.—, 1/2 Seite Fr. (DM) 90.—, 1/4 Seite Fr. (DM) 50.—.

Alle Rechte, einschließlich der Übersetzung und Reproduktion auf photomechanischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. © Birkhäuser Verlag Basel 1961.

Gesamtherstellung: Konrad Triltsch, Graphischer Großbetrieb, Würzburg

Die Auslieferung dieser Zeitschrift erfolgt für Deutschland durch den Birkhäuser Verlag, Stuttgart Olgastraße 53 und für alle übrigen Staaten durch den Birkhäuser Verlag in Basel.

Beiträge zur Gruppentheorie VIII: Beziehungen zwischen isomorphen Untergruppen einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$

Von

Otto Grün

H. Wielandt zum 50. Geburtstag

$\mathfrak{G}$ sei hier durchweg eine Gruppe von endlicher Ordnung. Um Trivialitäten zu vermeiden, sei $\mathfrak{G}$ nicht-abelsch.

1. $\mathfrak{U}$ mit den Elementen U_μ, $\mu = 1, \ldots$ und $\overline{\mathfrak{U}}$ mit den Elementen $\overline{U}_\mu$, $\mu = 1, \ldots$ seien Untergruppen von $\mathfrak{G}$ und es sei

$$\mathfrak{U} \cong \overline{\mathfrak{U}}$$

mit der Zuordnung

$$U_\mu \to \overline{U}_\mu, \quad \mu = 1, \ldots .$$

S sei ein beliebiges Element $\in \mathfrak{G}$ und es sei

$$A_S = \sum_\mu U_\mu^{-1} S \overline{U}_\mu .$$

Dann ist für beliebige $U_\nu \in \mathfrak{U}$

$$U_\nu A_S \equiv \sum_\mu (U_\mu U_\nu^{-1})^{-1} S \overline{U}_\mu \equiv \sum_\mu U_\mu^{-1} S \overline{U}_\mu U_\nu \equiv A_S \overline{U}_\nu .$$

Ist T ein weiteres Element $\in \mathfrak{G}$, das in A_S nicht als Summand auftritt, so hat man ebenso

$$A_T = \sum_\mu U_\mu^{-1} T \overline{U}_\mu$$

und

$$U_\nu A_T = A_T \overline{U}_\nu .$$

Indem man so fortfährt, erhält man weitere $A_R, \ldots$ und, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ irgendwelche Zahlen sind, so gilt offenbar

$$U_\nu(\alpha_1 A_S + \alpha_2 A_T + \cdots) = (\alpha_1 A_S + \alpha_2 A_T + \cdots)\overline{U}_\nu .$$

Wir erhalten also einen Transformationsmodul $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{U}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{U}}$, der einen endlichen Rang hat.

Man kann einen zu $\mathfrak{A}$ „inversen" Modul $\mathfrak{B}$ definieren mit $\overline{\mathfrak{U}}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ durch

$$B_S = \sum_\mu \overline{U}_\mu{}^{-1} S U_\mu .$$

Für irgendwelche $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ gilt dann

$$\left.\begin{array}{l} U_\mu A B = A B U_\mu \\ \overline{U}_\mu B A = B A \overline{U}_\mu \end{array}\right\} \quad \mu = 1, 2, \ldots .$$

2. *Wenn der Modul $\mathfrak{A}$ aus Abschnitt 1 einen Nichtnullteiler A enthält, so ist der Isomorphismus $U_\mu \to \overline{U}_\mu$ von $\mathfrak{U}$ auf $\overline{\mathfrak{U}}$ so beschaffen, daß stets U_μ und $\overline{U}_\mu$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert sind.*

Beweis. Da A Nichtnullteiler ist, folgt aus $U_\mu A = A \overline{U}_\mu$:

$$\overline{U}_\mu = A^{-1} U_\mu A .$$

U_μ und $\overline{U}_\mu$ liegen also in der Gruppe der Nichtnullteiler der Gruppenalgebra in der gleichen Klasse konjugierter Elemente. Sind $\langle U_\mu \rangle_{\mathfrak{G}}$, $\langle \overline{U}_\mu \rangle_{\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{G}$ die U_μ, bzw. $\overline{U}_\mu$ enthaltenden Klassen, so liegen also auch $\langle U_\mu \rangle_{\mathfrak{G}}$ und $\langle \overline{U}_\mu \rangle_{\mathfrak{G}}$ in der Gruppenalgebra in der gleichen Klasse konjugierter Elemente. Das ist aber offenbar nur möglich, wenn $\langle U_\mu \rangle_{\mathfrak{G}} = \langle \overline{U}_\mu \rangle_{\mathfrak{G}}$ ist, also U_μ und $\overline{U}_\mu$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert sind.

3. *Wenn $\mathfrak{U} \simeq \overline{\mathfrak{U}}$ mit der Zuordnung $U_\mu \to \overline{U}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots$ ist und hierbei stets $\langle U_\mu \rangle_{\mathfrak{G}} = \langle \overline{U}_\mu \rangle_{\mathfrak{G}}$ ist, so sind $\mathfrak{U}$ und $\overline{\mathfrak{U}}$ durch einen Nichtnullteiler A konjugiert mit $\overline{U}_\mu = A^{-1} U_\mu A$ für alle U_μ.*

Beweis. Γ sei eine Darstellung von $\mathfrak{G}$, $\Delta_{\mathfrak{U}}$, $\Delta_{\overline{\mathfrak{U}}}$ die in Γ enthaltenen Darstellungen von $\mathfrak{U}$ bzw. $\overline{\mathfrak{U}}$. $\Delta_{\mathfrak{U}}$ und $\Delta_{\overline{\mathfrak{U}}}$ sind isomorphe Matrizengruppen, die gleichen Charakter haben, da U_μ und $\overline{U}_\mu$ stets in der gleichen Klasse von $\mathfrak{G}$ liegen. Dann gibt es nach einem bekannten Satz eine Matrix M mit $M^{-1} \Delta_{\mathfrak{U}} M = \Delta_{\overline{\mathfrak{U}}}$, die den Isomorphismus von $\mathfrak{U}$ auf $\overline{\mathfrak{U}}$ bewirkt. Nun sei Γ eine absolut irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ vom Grade n. Jedes Element $S \in \mathfrak{G}$ wird in Γ durch eine Matrix $(\alpha_{i,k}^S)$ von n Zeilen und Spalten dargestellt. Setzen wir

$$\zeta_{i,k} = \frac{n}{g} \sum_{S \in \mathfrak{G}} \alpha_{i,k}^{S^{-1}} S , \qquad i, k = 1, \ldots, n ,$$

so bilden die $\zeta_{i,k}$ die Basis einer vollständigen Matrixalgebra, es ist $\zeta_{i,k} \zeta_{k,l} = \zeta_{i,l}$, $\zeta_{i,k_1} \cdot \zeta_{k_2,l} = 0$ für $k_1 \neq k_2$. Diese vollständige Matrixalgebra ist ein zweiseitiges, zweiseitig einfaches Ideal der Gruppenalgebra von $\mathfrak{G}$. Ihre Haupteinheit ist

$$\sum_{i=1}^{n} \zeta_{i,i} = \frac{n}{g} \sum_{\langle S \rangle} \chi(S) \langle S \rangle .$$

Jede der einspaltigen Matrizes

$$\xi_k = \begin{pmatrix} \zeta_{1,k} \\ \zeta_{2,k} \\ \zeta_{n,k} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n ,$$

ergibt die gleiche absolut irreduzible Darstellung Γ von $\mathfrak{G}$

$$\xi_k \cdot S = (\alpha_{i,k}^S)\, \xi_k ,$$

denn

$$\zeta_{i,k}\cdot S=\sum_{S_1\in\mathfrak{G}}\alpha_{i,k}^{S_1^{-1}}S_1\cdot S=\sum_{S_1}\alpha_{i,k}^{SS_1^{-1}}S_1=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{i,l}^{S}\sum_{S_1}\alpha_{l,k}^{S_1^{-1}}S_1=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{i,l}^{S}\zeta_{l,k}\,.$$

Es seien nun $\varDelta_{\mathfrak{U}}$, $\varDelta_{\overline{\mathfrak{U}}}$ die in Γ enthaltenen Darstellungen von $\mathfrak{U}$ bzw. $\overline{\mathfrak{U}}$, also

$$\xi_k\,\mathfrak{U}=\varDelta_{\mathfrak{U}}\,\xi_k\,,$$
$$\xi_k\,\overline{\mathfrak{U}}=\varDelta_{\overline{\mathfrak{U}}}\,\xi_k\,.$$

Nach obiger Überlegung ist nun $\varDelta_{\overline{\mathfrak{U}}}=M^{-1}\varDelta_{\mathfrak{U}}M$, also $\xi_k\overline{\mathfrak{U}}=M^{-1}\varDelta_{\mathfrak{U}}M\xi_k$. Da Γ absolut irreduzibel ist, kann man n^2 unabhängige Matrizes $M_{S_1},\ldots,M_{S_{n^2}}$ aus Γ so bestimmen, daß man jede quadratische Matrix M von n Zeilen durch eine Summe:

$$M=\sum_{\nu=1}^{n^2}\alpha_\nu M_{S_\nu}$$

mit geeigneten Koeffizienten α_ν darstellen kann. Wenn also $\varDelta_{\overline{\mathfrak{U}}}=M^{-1}\varDelta_{\mathfrak{U}}M$ ist, wird etwa

$$M=\sum_{\nu=1}^{n^2}\alpha_\nu M_{S_\nu}\,,\quad M^{-1}=\sum_{\nu=1}^{n^2}\beta_\nu M_{S_\nu}\,,$$

wobei $M_{S_\nu}=(\alpha_{i,k}^{S_\nu})$ ist. Damit hat man

$$\xi_k\overline{\mathfrak{U}}=\varDelta_{\overline{\mathfrak{U}}}\xi_k=M^{-1}\varDelta_{\mathfrak{U}}M\,\xi_k=M^{-1}\varDelta_{\mathfrak{U}}\xi_k\sum_\nu\alpha_\nu S_\nu=M^{-1}\xi_k\,\mathfrak{U}\sum_\nu\alpha_\nu S_\nu=$$
$$=\xi_k\Big(\sum_\nu\beta_\nu S_\nu\Big)\,\mathfrak{U}\sum_{\nu=1}^{n^2}\alpha_\nu S_\nu=\xi_k\overline{\mathfrak{U}}\,.$$

Da M Nichtnullteiler ist, ist $\varepsilon\sum_\nu\alpha_\nu S_\nu$ Nichtnullteiler in der aus obigem zweiseitigen, zweiseitig einfachen Ideal entstehenden Algebra, wenn wir mit ε ihre Haupteinheit bezeichnen. Sind nun $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_r$ die sämtlichen verschiedenen absolut irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$, so gehört zu jedem Γ_ν eine wie oben definierte Algebra $\mathfrak{K}_\nu$ mit einer Haupteinheit ε_ν und man hat stets ein $A_\nu\varepsilon_\nu$, das in $\mathfrak{K}_\nu$ Nichtnullteiler ist und $\varepsilon_\nu\overline{\mathfrak{U}}=\varepsilon_\nu A_\nu^{-1}\mathfrak{U}A_\nu$ erfüllt. Dann ist aber auch $\sum_{\nu=1}^{r}\varepsilon_\nu A_\nu$ Nichtnullteiler, da $\varepsilon_\nu\varepsilon_\mu=0$, $\nu\neq\mu$, ist. Damit folgt:

$$\overline{\mathfrak{U}}=\Big(\sum\varepsilon_\nu A_\nu\Big)^{-1}\mathfrak{U}\Big(\sum\varepsilon_\nu A_\nu\Big)\qquad\text{w. z. b. w.}$$

Es sei noch bemerkt: Die hier auftretende Gruppe der Nichtnullteiler ist von nichtendlicher Ordnung. Wenn man aber statt des Körpers $\mathfrak{K}$ der m-ten Einheitswurzeln einen Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{p})$ mit der Charakteristik $\mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p}$ ein zur Ordnung von $\mathfrak{G}$ primes Primideal aus $\mathfrak{K}$ ist, zugrunde legt, so bleiben alle obigen Betrachtungen richtig, und die Gruppe der Nichtnullteiler ist eine endliche Gruppe.

4. *Die Automorphismen von $\mathfrak{G}$, die jedes Element $\in\mathfrak{G}$ in seiner Klasse konjugierter Elemente belassen, sind innere Automorphismen der Gruppe der Nichtnullteiler.*

Beweis. Das folgt aus Abschnitt 3. Läßt der Automorphismus ϑ von $\mathfrak{G}$ alle Klassen von $\mathfrak{G}$ invariant, so ist die Zuordnung $S\to S^\vartheta$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^\vartheta$, wobei $\langle s\rangle_{\mathfrak{G}}=\langle s^\vartheta\rangle_{\mathfrak{G}}$ ist. Also gibt es einen Nichtnullteiler A, der $A^{-1}SA=S^\vartheta$ für alle $S\in\mathfrak{G}$ erfüllt.

5. $\mathfrak{G}$ *enthalte einen Normalteiler* $\mathfrak{N} > 1$ *und die Ordnungen von* $\mathfrak{N}$ *und* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ *seien prim zueinander. Dann kann* $\mathfrak{G}$ *faktorisiert werden:*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{U}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} = 1.$$

Es seien zwei solche Faktorisierungen gegeben:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{U}\mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{U}}\mathfrak{N}.$$

Dann sind $\mathfrak{U}$ *und* $\overline{\mathfrak{U}}$ *in der Gruppe der Nichtnullteiler konjugiert.*

Beweis. Jede Restklasse $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ enthält genau ein Element $U \in \mathfrak{U}$ und ein Element $\overline{U} \in \overline{\mathfrak{U}}$. Es ist $\mathfrak{U} \simeq \overline{\mathfrak{U}}$ mit der Zuordnung $U \rightarrow \overline{U}$ für alle $U, \overline{U}$. Wenn bewiesen ist: $\langle U \rangle_{\mathfrak{G}} = \langle \overline{U} \rangle_{\mathfrak{G}}$, folgt die Behauptung aus Abschnitt 3. Aus $U\mathfrak{N} = \overline{U}\mathfrak{N}$ folgt $(U\mathfrak{N})^k = U^k\mathfrak{N} = (\overline{U}\mathfrak{N})^k = \overline{U}^k\mathfrak{N}$ für $k = 1, 2, \ldots$. Also wird $\{U\}\,\mathfrak{N} = \{\overline{U}\}\mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{G}}$. In $\mathfrak{H}$ sind $\{U\}$ und $\{\overline{U}\}$ nilpotente Halluntergruppen, sie sind also nach einem Satz von WIELANDT in $\overline{\mathfrak{G}}$ konjugiert. Dann folgt aus $U\mathfrak{N} = \overline{U}\mathfrak{N}$, daß auch U und $\overline{U}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ konjugiert sind. Also ist stets $\langle U \rangle_{\mathfrak{G}} = \langle \overline{U} \rangle_{\mathfrak{G}}$ und damit die Behauptung bewiesen.

6. Von ZASSENHAUS stammt die Vermutung, daß in dem in Abschnitt 5 behandelten Falle $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}\mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{U}}\mathfrak{N}$ stets $\mathfrak{U}$ mit $\overline{\mathfrak{U}}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert sein müsse. Aus 5. folgt sofort: Die Vermutung von ZASSENHAUS ist dann und nur dann für $\mathfrak{U}, \overline{\mathfrak{U}}$ richtig, wenn gilt: Ist eine in $\mathfrak{G}$ liegende Untergruppe $\overline{\mathfrak{U}}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{U}$ in der Gruppe der Nichtnullteiler $\mathfrak{H}$ konjugiert, so ist sie mit $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert.

Eingegangen am 23. 10. 1961

Anschrift des Autors:
Otto Grün
Mathematisches Institut
der Universität Würzburg
Klinikstraße 6

A Generalisation of a Theorem of MAL'CEV

By

GILBERT BAUMSLAG *)

1. In 1949 A. I. MAL'CEV [1] proved the following important theorem for a torsion-free nilpotent group G. Let p be any prime and let $u \in G$. Then G can be embedded in a torsion-free nilpotent group H, which has the same class as G, so that u has a p-th root in H. No such theorem is possible in general. For suppose that p is any given prime. Then there exists a nilpotent group G with an element u such that any supergroup H of G in which u has a p-th root is not nilpotent (B. H. NEUMANN and JAMES WIEGOLD [2]). However we shall prove the following theorem.

Theorem 1. *If p is any prime and G any given finitely generated nilpotent group, then G can be embedded in a nilpotent group H so that any element u in G now has a p-th root in H.*

We observe that it follows from the proof of Theorem 1 that if G does not have any elements of order p then H too can be chosen without elements of order p. Moreover if G is torsion-free then H can also be chosen torsion-free. Thus our theorem can be used to provide an alternative proof of Mal'cev's theorem [1] (using a well-known procedure — see e.g. B. H. NEUMANN [3]). It is worth noting that Mal'cev's proof uses the apparatus of lie algebras; on the other hand our proof is completely group-theoretic, relying only on Euclid's Algorithm and a simple result of K.W. GRUENBERG [4], Theorem 2.1, p. 39. Several other proofs of Mal'cev's theorem have already appeared — in particular one by LAZARD [5], Theorem 4.8, p. 180, and two by P. HALL [6].

Theorem 1 can further be utilised. We shall prove:

Theorem 2. *Any finitely generated nilpotent group can be embedded in a locally nilpotent group which is divisible* [1]).

Thus we are able to deduce that any nilpotent group can be embedded in a locally nilpotent divisible group. It follows from a theorem of S. N. ČERNIKOV [8] (see also KUROSH [7] vol. 2 p. 234) that this result is best possible in the sense that locally nilpotent cannot be replaced by nilpotent. We can also, in the same way, prove that any locally nilpotent group can be embedded in a locally nilpotent divisible

---

*) This work has been sponsored by the National Science Foundation, Grant G9659.

[1]) A divisible group is one in which extraction of roots is always possible (cf. e.g. KUROSH [7] vol. 1 p. 163 and vol. 2 p. 233).

group. This generalises the corresponding theorems — for torsion-free locally nilpotent groups and periodic locally nilpotent groups — by Mal'cev [1] and Baumslag [9] respectively.

2. We begin by proving Theorem 1. Thus let p be a prime, G a finitely generated nilpotent group and u an element of G. Now the elements in G of order a power of p form a normal subgroup $p(G)$ of G (cf. e.g. Kurosh [7], vol. 2 p. 229). Moreover since G is finitely generated $p(G)$ is finite (cf. Kurosh [7], vol. 2 p. 230). Let us call G m-free, where m is any positive integer, if G does not have any elements of order m. Then it follows immediately from a theorem of K. W. Gruenberg [4] that if $x \in G$ and $x \notin p(G)$, then there exists a normal subgroup N_x of G such that $G_x = G/N_x$ is a finite p-free group and $x \notin N_x$. It follows also (cf. [4]) that there exists a normal subgroup $N(p)$ of G such that $G(p) = G/N(p)$ is finite and $N(p) \cap p(G) = 1$. Therefore (cf. K. W. Gruenberg [4]) G can be embedded in the direct product K of $G(p)$ and the unrestricted direct product of the factor groups G_x:

$$K = G(p) \times \overline{\prod_{x \notin p(G)}} G_x .$$

We observe now that $G(p)$ can be embedded in a finite nilpotent group J so that every element of $G(p)$ has a p-th root in J (G. Baumslag [9]). In addition, for each $x \notin p(G)$, G_x is a finite p-free group; so every element of G_x has a p-th root in G_x. Therefore every element of K, qua subgroup of

$$K^* = J \times \overline{\prod_{x \notin p(G)}} G_x ,$$

has a p-th root in K^*. Since K^* is obviously nilpotent it follows that G can be embedded in a finitely generated nilpotent group H so that u has a p-th root in H. Moreover if G is p-free then H can be chosen p-free and if G is torsion-free then H can be chosen torsion-free. To see this let us put

$$L = gp(G, u_0) ,$$

where u_0 is a p-th root of the element u (in G) mentioned at the outset; here, clearly, we are thinking of L as a subgroup of K^*. Now if G is p-free we may put $H = L/p(L)$ and if G is torsion-free we may put $H = L/T$, where T is the set of elements of finite order in L. It is clear that H has the required properties. This completes the proof of Theorem 1.

We proceed now to the proof of Theorem 2 via a variation of the classical Steinitz tower argument (cf. Baumslag [10]).

We begin by arranging the primes in a "repeating sequence":

$$p_1, p_2, p_3, \ldots ; \tag{1}$$

this sequence has the property that if p is any given prime and m any given integer, then there exists an integer $n > m$ such that

$$p_n = p .$$

Next we define a countable ascending sequence of finitely generated nilpotent groups G_i:

$$G_1 \leqq G_2 \leqq G_3 \ldots.$$

We begin by putting

$$G_1 = G.$$

We now define G_{n+1} inductively. Thus we suppose $G_1, G_2, \ldots, G_n$ have already been defined, $G_i \leqq G_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, and that each G_i is a finitely generated nilpotent group whose elements have already been explicitly enumerated in a *non-terminating* sequence:

$$u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Observe that we allow repetitions of group elements in an enumeration and so the various sequences can therefore be chosen infinite, as required. We now take G_{n+1} to be any finitely generated nilpotent group containing G_n such that

$$u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n} \text{ have } p_n\text{-th roots in } G_{n+1},$$

$$u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2\,n-1} \text{ have } p_{n-1}\text{-th roots in } G_{n+1}, \ldots, \text{ and}$$

$$u_{n1} \text{ has a } p_1\text{-th root in } G_{n+1}.$$

Notice that the existence of such a group G_{n+1} is ensured by Theorem 1. Thus we can complete the definition of all the groups G_i inductively. We then put

$$G^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

G^* is clearly locally nilpotent since the groups G_i form an ascending series of nilpotent subgroups of G^*. Moreover if $g \in G^*$ then $g \in G_n$ for some n. So if p is any prime it follows from the choice of the sequence (1) and the groups G_i that, for a suitably large choice of k, g has a p-th root in G_k. Thus G^* is divisible. This completes the proof of Theorem 2.

It follows, by the usual techniques (see e.g. B. H. NEUMANN [3]), that we can extend this theorem about finitely generated groups to the more general class of locally nilpotent groups. To put the matter precisely: Every locally nilpotent group can be embedded in a locally nilpotent divisible group.

References

[1] A. I. MAL'CEV, Nilpotent torsion-free groups. Izvestija Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. **13**, 201—212 (1949).

[2] B. H. NEUMANN and J. WIEGOLD, On certain imbeddability criteria in group amalgams. Publ. Math., Debrecen. Forthcoming.

[3] B. H. NEUMANN, An embedding theorem for abstract algebraic systems. Proc. London Math. Soc., III. Ser. **4**, 138—153 (1954).

[4] K. W. GRUENBERG, Residual properties of infinite soluble groups. Proc. London Math. Soc., III. Ser. **7**, 29—62 (1957).

[5] M. LAZARD, Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie. Ann. Sci. École Norm. Sup., III. Ser. **71**, 101—190 (1954).

[6] P. Hall, Canadian Mathematical Congress. University of Alberta 1957.

[7] A. G. Kurosh, The theory of groups, volumes 1 and 2. Chelsea Publishing Co., New York 1955.

[8] S. N. Černikov, Complete groups with an ascending central series. Mat. Sbornik **18**, 397—422 (1946).

[9] G. Baumslag, Wreath products and p-groups. Proc. Cambridge Philos. Soc. **55**, 224—231 (1959).

[10] G. Baumslag, Some remarks on nilpotent groups with roots. Proc. Amer. Math. Soc. **12**, 262—267 (1961).

Eingegangen am 19. 9. 1961

Anschrift des Autors:

Gilbert Baumslag
Institute of Mathematical Sciences
New York University
25, Waverly Place
New York 3 (N.Y.), USA

Aufzählung der Partitionen endlicher Gruppen mit trivialer Fittingscher Untergruppe

Von

Otto H. Kegel

Läßt die endliche Gruppe G mit trivialer Fittingscher Untergruppe eine nicht-triviale Partition zu, so ist G nach Suzuki [8] entweder der $PGL(2, p^n)$, der $PSL(2, p^n)$ (in beiden Fällen $p^n \geqq 4$) oder aber einer der neuen einfachen Gruppen $G(q)$ von Suzuki [7] isomorph.

a. $G \simeq G(q)$, mit $q = 2r^2$, $r = 2^n$. Dann ist $o(G) = (q^2 + 1)\, q^2 (q - 1)$. Suzuki beschreibt in [7] eine normale, Hallsche Partition π von G, deren Komponenten die Ordnungen $q + 2r + 1$, $q - 2r + 1$, $q - 1$ sowie q^2 haben. Komponenten von π mit einer der ersten drei Ordnungen sind zyklisch. Daher müßte jede echte Verfeinerung von π eine nicht-triviale Partition in mindestens einer 2-Sylowgruppe Q von G induzieren. Nach der Konstruktion von G (Suzuki [7], p. 869) besitzt Q zwei Elemente der Ordnung 4, die nicht miteinander vertauschbar sind. Nach Baer ([2], Hilfssatz A. 15) kann Q dann nur die triviale Partition zulassen. Also ist die Partition π die feinste Partition von G. — Da nach Suzuki [7] die Komponenten dieser Partition maximale nilpotente Untergruppen von G sind, und da Komponenten einer normalen, nicht-trivialen Partition einer einfachen Gruppe nilpotent sind (Kegel [4], Satz 2), so gibt es keine andere nicht-triviale, normale Partition von G.

Sei nun eine nicht-normale Vergröberung der Partition π von G gegeben. Sei S eine Komponente dieser neuen Partition, die eine Komponente von π echt enthält, so ist $\pi \cap S$ eine nicht-triviale, normale, Hallsche Partition von S. Wäre S nun nicht auflösbar, so wäre S entweder eine nicht auflösbare Frobeniusgruppe oder aber S hätte einen der in der Einleitung angegebenen Typen. Da $o(G)$ nicht durch 3 teilbar ist-nicht-auflösbare Frobeniusgruppen nach Suzuki [6] aber einen Kompositionsfaktor vom Typ $PSL(2, p)$ haben, und die Ordnung der Gruppen vom Typ $PSL(2, p)$ durch 3 teilbar ist, so hat S die Form $S = G(q')$ mit $q' < q$. Da die 2-Sylowuntergruppe einer Gruppe vom Typ $G(q)$ diese unter den anderen dieser Familie kenn, zeichnet, so kann S keine 2-Sylowgruppe von $G(q)$ ganz enthalten. Also enthält S eine zyklische Komponente von π. Die Ordnung einer Komponente kleinster Ordnung von π ist $q - 2r + 1$. Unter den zyklischen Komponenten von $\pi \cap S$ hat die größter Ordnung die Ordnung $q' + 2r' + 1$. Also muß gelten

$$q' + 2r' \geqq q - 2r.$$

Es ist aber $q = 2r^2$ und $q' = 2r'^2$. Also wäre $r/r' \cdot (r - 1) \leqq (r' + 1)$. Aber $r \geqq 2r'$ und damit hat man einen Widerspruch zur Annahme, S sei nicht auflösbar.

Ist S auflösbar, so ist nach BAER ([1], Satz 6.11) $\pi \cap S$ eine minimale Frobeniuspartition von S. Jede Komponente von $\pi \cap S$ ist eine Komponente von π. Sei K der Frobeniuskern von S, dann ist K eine Komponente von π, und für die Hallsche Untergruppe S von G gilt $S \subseteq \mathfrak{N}K$. Wäre K eine zyklische Komponente von π, so wäre nach SUZUKI [7] $[\mathfrak{N}K : K] = 2$ oder 4, und K wäre die größte Hallsche Untergruppe von G, die in $\mathfrak{N}K$ enthalten ist. Da aber S eine Hallsche Untergruppe von G ist, so ist K eine 2-Sylowgruppe von G. Ein Frobeniuskomplement von K in S ist aber eine Komponente von π; wegen $S \subseteq \mathfrak{N}K$ hat so ein Frobeniuskomplement die Ordnung $q - 1$, so daß sogar gilt $SK = \mathfrak{N}K$. — Läge nun noch eine 2-Sylowgruppe Q von G echt in einer anderen Komponente T dieser Vergröberung von π, so wäre $o(S) = o(T) = q^2(q-1)$. Aber aus $S \cap T = 1$ folgt: $o(G) \geqq o(S)\, o(T)$. Dies ist aber ein Widerspruch gegen $o(G) = q^2(q^2+1)(q-1)$. Also entsteht diese Partition aus π, indem man den Normalisator einer 2-Sylowgruppe von G zur Komponente wählt und alle in ihm enthaltenen Komponenten von π fortläßt, alle anderen beibehält. — Somit gilt

Satz A. *Die einfachen Gruppen $G(q)$ von* SUZUKI *besitzen genau eine nicht-triviale, normale Partition. — Je zwei nicht-triviale, nicht-normale Partitionen von $G(q)$ sind zueinander konjugiert.*

b. $G \simeq PGL(2, p^n)$, mit $p^n \geqq 4$. Dann ist $o(G) = (p^n + 1)\, p^n (p^n - 1)$. Nach DICKSON (Chapter XII) gibt es in G eine normale Partition π mit Komponenten der Ordnungen $p^n + 1$, $p^n - 1$ und p^n. Die Komponenten der Ordnungen $p^n + 1$ und $p^n - 1$ von π sind zyklisch. Es gibt Komponenten der Ordnung $p^n - 1$ von π, die eine elementar-abelsche p-Sylowgruppe (und Komponente der Ordnung p^n) P normalisieren. Sei g ein Element der Ordnung p aus P, dann ist $P = \mathfrak{C}g$; daraus ergibt sich, daß P nicht nur eine maximale nilpotente Untergruppe von G ist, sondern zugleich die größte nilpotente Untergruppe von G, die ein Element $\neq 1$ von P enthält. Da die Untergruppen der Ordnungen $p^n + 1$ und $p^n - 1$ maximale zyklische Untergruppen von G sind, so ist die Partition π von G nicht nur eine gröbste, normale, nicht-triviale Partition von G, sondern auch die einzige. — Wie unter a. sieht man, daß jede nicht-normale Vergröberung von π genau eine Komponente besitzt, die mit dem Normalisator (der Ordnung $p^n(p^n - 1)$) einer p-Sylowgruppe P von G übereinstimmt. Je zwei dieser Vergröberungen sind konjugiert. — Daher gilt

Satz B. *Die Gruppen $PGL(2, p^n)$, mit $p^n \geqq 4$, besitzen genau eine gröbste, normale, nicht-triviale Partition π. — Je zwei nicht-normale Vergröberungen von π sind konjugiert.*

Jede Partition von G, die von den beiden in Satz B angegebenen abweicht, induziert in mindestens einer p-Sylowgruppe P von G eine nicht-triviale Partition (dafür muß natürlich $n > 1$ sein). Die feinste Partition von G besteht aus der Menge der maximal zyklischen Untergruppen von G.

c. $G \simeq PSL(2, p^n)$, mit $p^n \geqq 4$. Ist $p = 2$, so ist $PSL(2, 2^n) \simeq PGL(2, 2^n)$. Ist $p \neq 2$, so ist $PSL(2, p^n)$ ein einfacher Normalteiler vom Index 2 in $PGL(2, p^n)$. Die normale Partition von G, die in diesem Falle ($p \neq 2$) von der gröbsten normalen Partition von $PGL(2, p^n)$ in $G = PSL(2, p^n)$ induziert wird, nennen wir π; ihre

Komponenten haben die Ordnungen $(p^n + 1)/2$, $(p^n - 1)/2$, p^n. Es ist klar, daß Komponenten der ersten beiden Ordnungen zyklisch sind. Sie haben den Index 2 in ihren Normalisatoren. Ist nun eine gröbste, normale, nicht-triviale Partition von G gegeben, so ist jede Komponente dieser Partition nach KEGEL ([4], Satz 2) nilpotent. Daher ist jede p-Sylowgruppe von G eine Komponente dieser gröbsten normalen, nicht-trivialen Partition; denn die p-Sylowgruppe Q von G ist nach DICKSON ([3], chapter XII) der Zentralisator eines jeden Elements $\neq 1$ von Q. Sei nun L eine der zyklischen Untergruppen der Ordnung $p^n + 1$ oder $p^n - 1$, und sei L echt in einer (nilpotenten) Komponente R einer gröbsten normalen, nicht-trivialen Partition von G enthalten. Dann ist auch $\mathfrak{N}L \subseteq R$, da ja $[\mathfrak{N}L : L] = 2$. $\mathfrak{N}L$ ist aber eine Diedergruppe, also nur nilpotent, wenn $o(L)$ eine Potenz von 2 ist. In diesem Fall ist aber $\mathfrak{N}L$ eine 2-Sylowgruppe von G. Da in R nur zu L unter G konjugierte Komponenten von π enthalten sein können, so ist R eine 2-Untergruppe von G, also $R = \mathfrak{N}L$. Da in R außer L mindestens noch eine Komponente von π enthalten sein muß, und da diese zu L isomorph ist, so findet man $o(L) = [R : L] = 2$. Das ist aber nur möglich, wenn $o(L) = (p^n - 1)/2 = 2$, also $p^n = 5$ ist. Daher gilt

Satz C. *Die Gruppen $PSL(2, p^n)$ mit $p^n > 5$, sowie $PSL(2, 4)$ besitzen genau eine gröbste, normale, nicht-triviale Partition π, die mit der von der gröbsten, normalen, nicht-trivialen Partition von $PGL(2, p^n)$ in $PSL(2, p^n)$ induzierten Partition übereinstimmt. Je zwei nicht-normale Vergröberungen von π sind konjugiert.*

Die zweite Aussage ergibt sich genau wie unter a. und b.

Der Grund für die Aussonderung von $PSL(2, 5)$ ist darin zu suchen, daß diese Gruppe sich auch als $PSL(2, 4)$ darstellen läßt, die Partition π_4 aber die gröbste und die Partition π_5 die feinste normale Partition der einfachen Gruppe der Ordnung 60 ($\simeq PGL(2,4) \simeq PSL(2,4) \simeq PSL(2,5)$) bilden.

Jede Partition von $PSL(2, p^n)$, die von den beiden in Satz C angegebenen abweicht, induziert in mindestens einer p-Sylowgruppe P von G eine nicht-triviale Partition (dafür muß natürlich $n > 1$ sein). Man kann sich leicht davon überzeugen, daß — mit Ausnahme von $PSL(2, 5)$ — jede Partition von $PSL(2, p^n)$ von einer Partition von $PGL(2, p^n)$ induziert wird.

d. Da im Falle ungeraden p's die Normalisatoren der Komponenten der Ordnungen $(p^n + 1)/2$ und $(p^n - 1)/2$ von $PSL(2, p^n)$ Diedergruppen sind, aber eine der beiden Komponenten gerade Ordnung hat, so ergibt sich, daß unter diesen Gruppen außer $PSL(2, 5)$ keine eine nicht-triviale Hallsche Partition zuläßt. Die einzigen einfachen Gruppen mit nicht-trivialer, normaler, Hallscher Partition sind also die $PSL(2, 2^n)$ mit $n \geqq 2$ und die einfachen Gruppen von SUZUKI.

e. Sei X eine nicht-primäre Komponente der nicht-trivialen, normalen Partition π der endlichen Gruppe G; sei q ein gemeinsamer Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X : X]$, dann ist in den oben diskutierten Gruppenklassen b. und c. stets $q = 2$; in den einfachen Gruppen $G(2^n)$ von SUZUKI kann diese Situation nicht auftreten, da die einzige nicht-triviale, normale Partition von $G(2^n)$ Hallsch ist. Die nicht-triviale Partition der symmetrischen Gruppe des Grades 4 besitzt keine nicht-primäre Komponente; also ist für $q \neq 2$ die Partition von G nicht-einfach. (Damit ist gezeigt, daß es

Gruppen der von Baer ([2], Abschnitt E) diskutierten Art nicht geben kann.) Ein π-zulässiger Normalteiler $\neq G$ von G ist nilpotent, und so folgt aus Kegel ([5], Korollar), daß X die Fittingsche Untergruppe $\mathfrak{F}G$ ist und $[G:X] = q$ gilt. Daher kann man in Kegel [2] das Korollar verschärfen zu

Satz E. *Ist die Komponente X der nicht-trivialen, normalen Partition π der endlichen Gruppe G nicht-primär und ist $([G:X], o(X)) \neq 1$, so ist $([G:X], o(X))$ eine Primzahl q. Entweder ist π einfach, dann ist $q = 2$ und G einer der Gruppen $PGL(2, p^n)$ oder $PSL(2, p^n)$ mit $p \neq 2$ isomorph (im letzteren Falle darf p^n keine Fermat- oder Mersenne-Primzahl oder 9 sein), oder $X = \mathfrak{F}G$, und $[G:X] = q$.*

Beweis. Ist π nicht-einfach, so ist die Fittingsche Untergruppe $\mathfrak{F}G \neq 1$. In diesem Fall beweist das Korollar aus Kegel [5] den Satz.

Ist π einfach, so kann G nur in den unter b. und c. diskutierten Gruppen liegen; denn die einzige nicht-triviale Partition der symmetrischen Gruppe des Grades 4 hat nur primäre Komponenten, und die einzige nicht-triviale Partition der einfachen Gruppen von Suzuki hat nur Hallsche Untergruppen von G als Komponenten. Es gilt $p \neq 2$; denn sonst sind die zyklischen Untergruppen der Ordnung $p^n \pm 1$ Hallsche Untergruppen von G. Sei $G \simeq PSL(2, p^n)$. Ist nun eine der beiden Zahlen $(p^n + 1)/2$ und $(p^n - 1)/2$ eine Potenz von 2 (dann ist die andere nicht durch 2 teilbar), so erfüllt auch keine der Komponenten der Ordnung $(p \pm 1)/2$ die Voraussetzungen unseres Satzes (in diesem Falle ist aber nach Thompson [9], Lemma 3 die Primzahlpotenz p^n entweder eine Mersenne- oder eine Fermat-Primzahl, oder $p^n = 9$; dann ist aber G einer Gruppe $PSL(2, p)$ mit p Fermat- oder Mersenne-Primzahl oder der Gruppe $PSL(2, 9)$ isomorph.) — Aus Dickson [3] ergibt sich sofort, daß $([G:X], o(X)) = 1$ oder 2 ist für jede zyklische Komponente der Ordnung $(p^n \pm 1)/2$ von $PSL(2, p^n)$. Damit ist der Satz E bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] R. Baer, Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **75**, 333—372 (1961).
[2] R. Baer, Einfache Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **77**, 1—37 (1961).
[3] L. E. Dickson, Linear groups. Leipzig 1901 (Chapter XII).
[4] O. H. Kegel, Die Nilpotenz der H_p-Gruppen. Math. Z. **75**, 373—376 (1961).
[5] O. H. Kegel, Nicht-einfache Partitionen endlicher Gruppen. Arch. Math. **12**, 170—175 (1961).
[6] M. Suzuki, On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes. Amer. J. Math. **77**, 657—691 (1955).
[7] M. Suzuki, A new type of simple groups of finite order. Proc. Nat. Acad. Sci., USA **46**, 868 bis 870 (1960).
[8] M. Suzuki, On a finite group with a partition. Arch. Math. **12**, 241—254 (1961).
[9] J. G. Thompson, A special class of non-solvable groups. Math. Z. **72**, 458—462 (1960).

Eingegangen am 30. 10. 1961

Anschrift des Autors:
Otto H. Kegel
Mathematisches Seminar
der Universität
Frankfurt (Main)

Über die Erweiterung des Idealverbandes einer Algebra bei Adjunktion eines Einselementes

Von

Ernst-August Behrens

Die Untersuchungen von E.-A. Behrens [1], R. L. Blair [2], J. P. Jans [6] und C. Nesbitt und W. M. Scott [7] über assoziative Ringe mit Einselement und distributivem Idealverband begründen das Interesse an folgendem

Satz 1. *Adjungiert man einer Algebra R über einem Körper K ein Einselement in der bekannten Weise (s. z. B.* N. Bourbaki [3], *Appendice), so entsteht eine Algebra R', deren (zweiseitige) Ideale dann und nur dann einen distributiven Verband V' bilden, wenn dies für den Idealverband V von R der Fall ist.*

Wenn es kein homomorphes Bild von R mit Einselement gibt, unterscheiden sich V und V' voneinander nur um das Ideal R von R'. Im anderen Falle spielt, falls R der Minimalbedingung für (zweiseitige) Ideale genügt, das Minimum P aller Ideale A, für die die Restklassenalgebra R/A ein Einselement besitzt, die Hauptrolle bei der Beschreibung der Struktur von V' aus der Struktur von V. Das Ideal P ist dabei der Durchschnitt eines Ideales P' aus $V' \setminus V$ mit R, und jedes Ideal A' aus $V' \setminus V$ läßt sich in der Form

$$A' = P' \cup A, \quad A = A' \cap R \tag{6}$$

darstellen.

Die Existenz von solchen Elementen R und P' in einem modularen Verband V', daß (6) für alle Verbandselemente A' aus $V' \setminus V$ gilt, wobei V der Unterverband der Vorgänger von R ist, ist die Voraussetzung des rein verbandstheoretischen Satzes 2. In ihm wird erstens behauptet, daß $V' \setminus V$ ein zu dem Intervall $[P, R]$ isomorpher Unterverband von V' ist, wobei P durch $P = P' \cap R$ definiert ist. Zweitens findet man in Satz 2, daß die Einordnung der Halbordnung H der $\cup$-irreduziblen Elemente aus V in die Halbordnung H' der $\cup$-irreduziblen Elemente aus V' durch die in H liegenden Vorgänger des Elementes P aus V bestimmt ist. Falls V' ein der Minimalbedingung genügender, distributiver Verband ist, ist damit die Struktur von V' bereits in V beschrieben, weil dann jedes Element aus V' die Verbindung endlich vieler $\cup$-irreduzibler Elemente aus V' ist (s. z. B. H. Hermes [4], § 21). Die dritte Behauptung des Satzes 2 besagt, daß V' dann und nur dann distributiv ist, wenn V es ist.

Die Anwendung des Satzes 2 auf die Idealverbände V und V' der Algebren R bzw. R' zeigt, wie diese zusammenhängen, und beweist, zusammen mit der obigen Be-

merkung über Algebren ohne homomorphe Bilder mit Einselement, die Richtigkeit des Satzes 1, falls R' der Minimalbedingung für Ideale genügt.

Der Satz 1 gilt aber auch ohne diese Minimalbedingung für R. Der zunächst vom Verfasser gegebene Beweis dafür ließ sich in 6. durch den verbandstheoretischen Satz 4, den der Verfasser einer Mitteilung von Herrn R. Baer verdankt, sehr viel durchsichtiger gestalten.

1. Erweitert man eine Algebra R über einem kommutativen Körper K zu der Algebra R' der Paare $(\varkappa, a)$, $\varkappa \in K$, $a \in R$, in der die Addition komponentenweise und die Multiplikation durch $(\varkappa, a)\,(\lambda, b) = (\varkappa\lambda, ab + \lambda a + \varkappa b)$ definiert ist, so ist $e = (1,0)$ das Einselement in R', und jedes Ideal in R ist auch Ideal in R'. Die Ideale in R und R' bilden je einen Verband V bzw. V'. Die Ideale $A' \notin V$ erhält man nach N. Bourbaki [3], Appendice, folgendermaßen: Da A' nicht zu V gehört, existiert ein Element $u \in R$, für das $u - e$ in A' liegt. Setzt man also $A = A' \cap R$, so gilt $xu \equiv x$ und $ux \equiv x$ (modulo A) für alle $x \in R$, so daß, falls u nicht in A liegt, u mod A das Einselement in R/A ist. Da R'/R die Dimension 1 über K hat, ist klar, daß die Beziehungen

$$A' = K(u - e) + A\,, \quad A = A' \cap R\,, \tag{1}$$

$$ux \equiv x \equiv xu \pmod{A} \tag{2}$$

richtig sind. Umgekehrt sei das Ideal $A \in V$ zweiseitig regulär bezüglich eines Elementes $u \in R$, d. h. es gelte (2). Dann ist $A' = K(u - e) + A$ ein Ideal aus $V' \setminus V$, dessen Schnitt mit R wieder auf A zurückführt.

2. Wenn für alle Ideale A' aus $V' \setminus V$ nur Elemente $u \in A$ die Relationen (1) erfüllen, enthält jedes solche Ideal das Einselement e von R', der Verband V' entsteht demnach aus V durch Hinzunahme von R' als Maximum. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn R ein Radikalring ist, d. h. wenn R mit seinem Radikal W im Sinne von N. Jacobson [5] übereinstimmt, weil dann zu $u \in W$ ein u_1 mit $u + u_1 - uu_1 = 0$ existiert, also, nach (2) für $x = u_1$, die Kongruenz

$$u = -(u_1 - uu_1) \equiv 0 \pmod{A}$$

gilt.

3. Wenn in $V' \setminus V$ ein Ideal $A' = K(u - e) + A$ mit nicht in A liegendem u existiert, dann ist nach (2) u mod A Einselement in R/A. Ein solches Ideal A existiert in R sicher dann, wenn die Restklassenalgebra R/W der Minimalbedingung für Linksideale genügt, da man dann $A = W$ nehmen kann. Für das Folgende sei also die Existenz eines Ideales A in R vorausgesetzt, für das die Restklassenalgebra R/A ein Einselement u mod A besitzt. Wenn auch das Ideal B diese Eigenschaft hat — es sei etwa v mod B Einselement in R/B —, ist $A \cap B$ ebenfalls ein derartiges Ideal mit $u + v - uv$ mod $A \cap B$ als Einselement in $R/A \cap B$, wie man folgendermaßen einsieht: Für alle $x \in R$ gilt

$$(u + v - uv)\,x = u(x - vx) + vx \equiv x \pmod{B}\,,$$

weil $x - vx$ in B enthalten ist. Ähnlich ist

$$x(u+v-uv) = x(u-uv) + xv \equiv x \pmod{B}.$$

Dieselben Kongruenzen beweist man analog für A, also gelten sie auch für $A \cap B$.

Dies erlaubt, falls R der Minimalbedingung für Ideale genügt, folgende

Definition. *P sei das Minimum aller Ideale A in R, für die R/A ein Einselement besitzt.* $q \bmod P$ *sei Einselement von R/P.*

Aus 1. folgt, daß

(3) $$P' = K(q-e) + P$$

ein Ideal aus $V' \setminus V$ ist. Es sei nun A' ein beliebiges Ideal aus $V' \setminus V$. Aus $A' \nsubseteq R$ und $\dim_K R'/R = 1$ folgt

(4) $$A' \cup R = R'.$$

Wie in (1) sei $A = A' \cap R$ gesetzt. (4) erlaubt, den Isomorphiesatz anzuwenden:

$$R/A = R/A' \cap R \simeq A' \cup R/A' = R'/A'.$$

Die damit bewiesene Isomorphie zwischen R/A und R'/A' impliziert, daß mit R', also mit R'/A', auch R/A ein Einselement besitzt, und damit, daß A das Ideal P umfaßt. Weil die Restklasse von q das Einselement in R/P repräsentiert, ist erst recht $q \bmod A$ das Einselement von R/A. Gemäß (1) und (3) gilt daher

(5) $$A' = K(q-e) + A = P' \cup A, \quad A = A' \cap R.$$

4. Damit sind alle Voraussetzungen des folgenden, rein verbandstheoretischen Satzes 2 für die Verbände V und V' der Ideale in R bzw. R' nachgewiesen.

Satz 2. *Voraussetzung: Sei R ein Element des modularen Verbandes V'. Mit V sei der Unterverband aller Vorgänger von R, also aller Elemente A aus V', für die $A \subseteq R$ gilt, bezeichnet. In $V' \setminus V$ existiere ein Element P' derart, daß für alle $A' \in V' \setminus V$ die Relationen*

(6) $$A' = P' \cup A, \quad A = A' \cap R$$

richtig sind.

Behauptungen: 1. *$V' \setminus V$ ist ein Unterverband von V'. Setzt man $P = P' \cap R$ und bezeichnet man mit $[P, R]$ das aus allen Elementen $A \in V$ mit $P \subseteq A \subseteq R$ bestehende Intervall, so sind $V' \setminus V$ und $[P, R]$ verbandsisomorph unter der Abbildung*

$$\varphi: A' - A' \cap R = A.$$

2. *P' ist $\cup$-irreduzibel. Die Halbordnung H' der $\cup$-irreduziblen Elemente aus V' ist die mengentheoretische Vereinigung der Halbordnung H zu V mit dem Elemente P'. Wenn $I \in H$, ist*

(7) $$I \subseteq P' \text{ äquivalent } I \subseteq P.$$

3. *Mit V ist V' distributiv.*

Beweis. α) Für alle Elemente A', B' aus V' gelten die Gleichungen

$$(A' \cap B') \cap R = A \cap B, \tag{8_1}$$

$$(A' \cup B') \cap R = A \cup B. \tag{8_2}$$

Nach Definition von A zu A' ist (8_1) trivial. Beweis von (8_2): Wenn A' und B' beide in V, ist (8_2) klar. Sei etwa $A' \in V' \setminus V$. Dann ist nach (6)

$$\begin{aligned}(A' \cup B') \cap R &= (A \cup B \cup P') \cap R \\ &= (A \cup B) \cup (P' \cap R), \quad \text{da } V' \text{ modular}, \\ &= A \cup B \cup P = A \cup B,\end{aligned}$$

denn aus (6) folgt $A' \supseteqq P'$ und damit $A \supseteqq P$.

β) Da, ebenfalls nach (6), mit A' und B' auch deren Schnitt und deren Verbindung P' enthalten, ist $V' \setminus V$ ein Unterverband von V'. Die Beziehungen (6) implizieren ferner, daß $A' \to A$ eine eineindeutige Zuordnung φ von $V' \setminus V$ in $[P, R]$ ist. Setzt man umgekehrt $A' = P' \cup A$ für jedes $A \in [P, R]$, so gilt

$$A' \cap R = (A \cup P') \cap R = A \cup (P' \cap R) = A \cup P = A,$$

weil V' modular ist. Also tritt jedes Element aus $[P, R]$ als Bild unter φ auf. Die Operationentreue von φ folgt aus (8). Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen.

γ) In einer Darstellung $P' = A' \cup B'$ können nicht A' und B' beide in V liegen, weil dann auch $A' \cup B'$ in V läge. Wenn aber etwa $A' \notin V$, ist nach (6) $P' \subseteqq A'$. Dies zeigt, daß P' $\cup$-irreduzibel ist. Die übrigen Elemente $A' = P' \cup A$ aus $V' \setminus V$ sind $\cup$-reduzibel, da für sie sowohl $P' \subset A'$ als auch $A \subset A'$ gilt. Natürlich bleiben die Elemente aus H $\cup$-irreduzibel in V', da $P' \notin V$. — Für $I \in H$ ist (7), wegen $I \subseteqq P'$ äquivalent $I = I \cap R \subseteqq P' \cap R = P$, klar.

δ) Um schließlich auch noch die dritte Behauptung des Satzes zu beweisen, sei der Verband V als distributiv vorausgesetzt. 1. Fall: $A' \cap B' \notin V$ oder $A' \cap C' \notin V$. Die Verbindung $(A' \cap B') \cup (A' \cap C')$ liegt dann ebenfalls in $V' \setminus V$. Sie ist nach (6) gleich der Verbindung von P' mit ihrem Schnitt mit R, also nach (8) gleich

$$P' \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) = P' \cup (A \cap (B \cup C)) = A' \cap (B' \cup C'),$$

weil mit $A' \cap B'$ oder $A' \cap C'$ erst recht $A' \cap (B' \cup C') \in V' \setminus V$ gilt. — 2. Fall: $A' \cap B' \in V$ und $A' \cap C' \in V$. Wenn dabei A' nicht in V liegt, also $A' \neq A$ ist, gilt $B' = B \in V$ und $C' = C \in V$, also $B' \cup C' = B \cup C$, andernfalls enthielte nämlich $A' \cap B'$ oder $A' \cap C'$ das nicht in V liegende Element P'. In jedem Falle ist nach (8)

$$\begin{aligned}A' \cap (B' \cup C') &= A' \cap R \cap (B' \cup C') = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \\ &= (A' \cap R \cap B') \cup (A' \cap R \cap C') = (A' \cap B') \cup (A' \cap C').\end{aligned}$$

Damit ist der rein verbandstheoretische Satz 1 bewiesen.

5. Wie bereits am Anfang von 4. bemerkt, läßt sich Satz 2 auf die Idealverbände der Algebra R und der aus ihr durch Adjunktion eines Einselementes hervorgehenden

Algebra R' anwenden, falls R ein Ideal A enthält, für das R/A ein Einselement besitzt, oder, einfacher gesagt, falls es ein homomorphes Bild von R mit Einselement gibt und falls R der Minimalbedingung für Ideale genügt. Insbesondere ist mit dem Idealverband V von R auch der Idealverband V' von R' distributiv. Die Struktur eines distributiven Verbandes V' mit Minimalbedingung wird völlig von der Struktur der Halbordnung H' seiner $\cup$-irreduziblen Elemente beherrscht; die 2. Behauptung in Satz 1 beschreibt dann, wie die Struktur des Idealverbandes von R' sich aus der Struktur des Idealverbandes von R ergibt, wobei zu beachten ist, daß P kein $\cup$-irreduzibles Ideal zu sein braucht. — Wenn schließlich R kein homomorphes Bild mit Einselement besitzt, ist nach dem unter 2) Gesagten der Übergang von V zu V' trivial: $V' = V \sqcup R'$. Dies alles kann man zu folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 3. *Durch Adjunktion eines Einselementes gehe die Algebra R' aus der Algebra R hervor. V und V' seien die Idealverbände von R bzw. von R'. Falls R kein homomorphes Bild mit Einselement besitzt, tritt beim Übergang von V zu V' allein R' zu den Idealen von R hinzu. Im anderen Falle sind die Voraussetzungen des verbandstheoretischen Satzes 2 für V und V' erfüllt, wenn R der Minimalbedingung für Ideale genügt. Dabei ist P das Minimum aller Ideale A, für die R/A ein Einselement besitzt, also der Durchschnitt der Kerne aller derjenigen Homomorphismen, die R auf Algebren mit Einselement abbilden. Die erste und die zweite Behauptung des Satzes 2 treffen daher für die Struktur des Verbandes der nicht bereits in R liegenden Ideale von R' bzw. für die Halbordnung H' der $\cup$-irreduziblen Ideale von R' zu. Nach der dritten Behauptung ist der Verband V' genau dann distributiv, wenn V es ist. Falls V insbesondere distributiv und, wegen der Minimalbedingung für Ideale, jedes Ideal Verbindung endlich vieler $\cup$-irreduzibler Ideale ist, beschreibt* (7) *die Struktur von V' bereits in V.*

Satz 3 enthält Satz 1, falls R der Minimalbedingung für Ideale genügt.

6. Falls R der Minimalbedingung für Ideale nicht genügt, kann man den Beweis des Satzes 1 auf den folgenden verbandstheoretischen Satz 4 gründen, den der Verfasser einer Mitteilung von Herrn R. Baer verdankt und der den ursprünglich vom Verfasser gegebenen Beweis des Satzes 1 sehr viel durchsichtiger macht.

Satz 4 (R. Baer). *Ist R ein Element des modularen Verbandes V', so sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend für die Distributivität von V':*
(a) *Die beiden durch R bestimmten Intervalle sind distributive Unterverbände von V';*

(b₁) $$R \cap (X \cup Y) = (R \cap X) \cup (R \cap Y),$$

(b₂) $$R \cup (X \cap Y) = (R \cup X) \cap (R \cup Y)$$

für alle X, Y aus V'.

Beweis des Satzes 4 nach R. Baer. Zu zeigen ist, daß aus (a) und (b) für je drei Elemente X, Y, Z aus V' folgt

(9) $$(X \cap Y) \cup (X \cap Z) = X \cap (Y \cup Z).$$

Die linke Seite der Gleichung (9) sei mit A, die rechte mit B bezeichnet. In jedem

Verband gilt $A \subseteqq B$. Da V' als modular vorausgesetzt ist, folgt bekanntlich aus $A \subseteqq B$ und

$$R \cap A = R \cap B, \quad R \cup A = R \cup B \tag{10}$$

die Gleichung $A = B$ (s. z. B. HERMES [4], § 8). Mehrfache Anwendung von (b) und (a) ergibt

$$\begin{aligned} R \cup A &= R \cup (X \cap Y) \cup (X \cap Z) = [(R \cup X) \cap (R \cup Y)] \cup [(R \cup X) \cap (R \cup Z)] = \\ &= (R \cup X) \cap [(R \cup Y) \cup (R \cup Z)] = (R \cup X) \cap (R \cup Y \cup Z) = \\ &= R \cup (X \cap (Y \cup Z)) = R \cup B. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} R \cap A &= R \cap [(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] = (R \cap X \cap Y) \cup (R \cap X \cap Z) = \\ &= [(R \cap X) \cap (R \cap Y)] \cup [(R \cap X) \cap (R \cap Z)] = \\ &= (R \cap X) \cap [(R \cap Y) \cup (R \cap Z)] = R \cap X \cap R \cap (Y \cup Z) = \\ &= R \cap [X \cap (Y \cup Z)] = R \cap B. \qquad \text{Q.e.d.} \end{aligned}$$

Wenn nun R' die aus der Algebra R über K durch Adjunktion eines Einselementes e hervorgehende Algebra ist, dann ist die Distributivität des Unterverbandes $[R, R']$ des Verbandes V' aller Ideale in R klar, weil $[R, R']$ wegen $\dim_K R'/R = 1$ nur aus R und R' besteht. Die Distributivität des Intervalles $[0, R]$ sei vorausgesetzt. Damit ist die Bedingung (a) aus Satz 4 für V' erfüllt. Wenn mit den Bezeichnungen von Teil 1) dieser Untersuchung X' und Y' beide in V liegen, genügen sie natürlich den beiden Gleichungen (b), weil dann $X' \subseteqq R$ und $Y' \subseteqq R$. — Wenn aber etwa

$$X' = X \in V \quad \text{und} \quad Y' \notin V,$$

gelten wegen der Modularität des Idealverbandes V' und wegen $X' = X \subseteqq R$ die Gleichungen

$$R \cap (Y' \cup X') = (R \cap Y') \cup X = Y \cup X = (R \cap Y') \cup (R \cap X'),$$

also (b_1). Andererseits ist dann

$$R \cup (X' \cap Y') = R = R \cap (R \cup Y') = (R \cup X') \cap (R \cup Y'),$$

also auch (b_2) richtig. — Wenn schließlich weder X' noch Y' in V liegt, ist

$$X' = K(u - e) + X \quad \text{und} \quad Y' = K(v - e) + Y$$

für geeignete u und v aus R. Nach (2) gilt $uv \equiv v \pmod X$ und $uv \equiv u \pmod Y$, also

$$u - v \equiv 0 \pmod{X \cup Y} \quad \text{und} \quad uv - (u + v) + e \in X' \cap Y'. \tag{11}$$

Dies impliziert sowohl

$$\begin{aligned} R \cap (X' \cup Y') &= R \cap (K(u - e) + K(v - e) + X + Y) = \\ &= K(u - v) + X + Y = X \cup Y = (R \cap X') \cup (R \cap Y'), \end{aligned}$$

also (b_1), als auch

$$R \cup (X' \cap Y') = R' = (R \cup X') \cap (R \cup Y'),$$

weil $X' \cap Y' \notin V$ und R' das einzige Oberideal von R ist.

Die Bedingungen (a) und (b) aus Satz 4 sind demnach erfüllt. Sie implizieren die Richtigkeit von Satz 1.

Literaturverzeichnis

[1] E.-A. Behrens, Einreihige Ringe. Math. Z. **77**, 207—218 (1961).
[2] R. L. Blair, Ideal Lattices and the structure of rings. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 136—153 (1953).
[3] N. Bourbaki, Elements de Mathématique, Algébre, Chap. 8, Modules et anneaux semi-simples.
[4] H. Hermes, Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955.
[5] N. Jacobson, Structure of rings. Providence 1956.
[6] J. P. Jans, On the indecomposable representations of algebras. Ann. of Math., II. Ser. **66**, 418—429 (1957).
[7] C. Nesbitt and W. M. Scott, Some remarks on algebras over an algebraically closed field. Ann. of Math., II. Ser. **44**, 534—553 (1943).

Eingegangen am 20. 12. 1961

Anschrift des Autors:
Ernst-August Behrens
Mathematisches Seminar der Universität
Frankfurt (Main)

The Automorphism Group of Certain Function Rings

By

KARL HEINRICH HOFMANN[1]) and FRED B. WRIGHT[2])

Let A be any ring, and let B be the collection of all central idempotents in A. Then B is a Boolean ring under the lattice operations $e \vee f = e + f - ef$, $e \wedge f = ef$. By M. H. STONE's duality theory [6], the Boolean ring B can be represented as the ring $C'(X, GF(2))$ of all continuous functions from its structure space X [3] to the Galois field $GF(2)$ of order 2, provided the functions have compact support in X. If G_B denotes the group of all automorphisms of B and if $H = H(X)$ is the group of all homeomorphisms of the Boolean space (= locally compact, totally disconnected Hausdorff space) X, the Stone duality theory shows that there is an isomorphism $\tau: G_B \to H$ between these two groups. More explicitly, if $g \in G_B$ and if $\tau(g) = \gamma \in H$, then $a^g(x) = a(\gamma x)$ for any $a \in C'(X, GF(2))$.

The purpose of this note is to consider an extension of this description of the automorphism group to a more general class of rings. The most decisive result which we shall give is for rings which can be represented in the same fashion as Boolean rings, where $GF(2)$ is replaced by any simple ring with an identity which is finite dimensional over its prime field. The class of rings which can be so represented has been elegantly treated by ARENS and KAPLANSKY [1]. Although this class of function rings will be of principal interest, we will do some things in a more general setting.

Throughout, the set of all central idempotents in a ring A will be denoted by B.

Definition 1. *A ring A will be called a weakly Boolean ring if* (i) *any maximal Boolean ideal y in the Boolean ring B is of the form $y = B \cap x$, where x is a maximal modular ideal in A, and* (ii) *any maximal modular ideal x in A is the extension Ay of a maximal Boolean ideal y in B.*

ARENS and KAPLANSKY [1] defined a *biregular* ring as one in which any principal two-sided ideal is generated by a central idempotent. MORRISON [4] showed that every biregular ring is weakly Boolean in the above sense. Moreover, MORRISON showed that in a biregular ring the correspondence indicated in Definition 1 holds for all ideals of A and B. An important class of rings which are weakly Boolean, but in which this stronger correspondence does not hold, is the family of all von Neumann algebras of finite type [7].

---

[1]) Research supported by the National Science Foundation.
[2]) Research Fellow of the Alfred P. Sloan Foundation.

Definition (SEGAL) 2. *A ring A is called strongly semisimple if the intersection of all the maximal modular ideals of A is the zero ideal.*

In any ring in which the notions of primitive and maximal ideals coincide, this notion is the same as semisimplicity in the sense of JACOBSON [3]. This is the case for Boolean rings and for biregular rings. All von Neumann algebras are semisimple in the sense of JACOBSON, and the algebras of finite type are characterized by strong semisimplicity. The set of all maximal modular ideals of a ring A is called the strong structure space of A, when topologized with the hull-kernel topology [5]. Thus, in a weakly Boolean ring, the structure space of B is the continuous, one-one image of the strong structure space of A; if A has a unit, these spaces are compact and homeomorphic.

For the moment, we shall use the following notation: A is a weakly Boolean ring, B is as before, X is the strong structure space of A, and Y is the structure space of B. The groups G_A and G_B are the full automorphism groups of A and B respectively, and $H = H(Y)$ is the full homeomorphism group of Y. Let τ be the isomorphism of G_B and H indicated above.

Lemma 1. *If $g \in G_A$, then g maps B into B, and the restriction of g to B is an automorphism of B. If $\varphi(g)$ denotes this induced automorphism, then the mapping*

$$\varphi : G_A \to G_B$$

is a homeomorphism of G_A into G_B.

The proof of this is obvious enough to allow its omission.

Definition 3. *For each $x \in X$, let $h_x : A \to A/x$ denote the natural homeomorphism, and let L_x denote the automorphism group of A/x. If $x \in X$ and if $g \in G_A$, write $x^g = \{a^g : a \in x\}$.*

Lemma 2. *If K is the kernel of the homeomorphism φ of Lemma 1, and if $g \in K$, then $x^g = x$ for each $x \in X$. There exists, for each $x \in X$, an automorphism $g(x) \in L_x$ such that $h_x(a^g) = (h_x(a))^{g(x)}$ for each $a \in A$. Moreover, for any $g_1, g_2 \in K$ and for any $x \in X$, we have $(g_1 g_2)(x) = g_1(x) g_2(x)$.*

Proof. Since $g \in K$, then $\varphi(g)$ is the identity on B, and therefore leaves invariant the maximal ideals of B. Since A is a weakly Boolean ring, g leaves invariant the maximal modular ideals of A. For any $x \in X$, the mapping h_x has x as its kernel, and x is invariant under g. Standard arguments yield the desired automorphism $g(x) \in L_x$, moreover,

$$(h_x(a))^{g_1 g_2(x)} = h_x(a^{g_1 g_2}) = (h_x(a^{g_1}))^{g_2(x)} = (h_x(a))^{g_1(x) g_2(x)}.$$

Lemma 3. *Let A be a strongly semisimple weakly Boolean ring. If $g \in K =$ kernel φ is such that $g(x) = 1$ for all $x \in X$, then $g = 1$.*

Proof. If $a^g \neq a$, then (by strong semisimplicity) there is an element $x \in X$ such that $h_x(a^g) \neq h_x(a)$; in other words, $(h_x(a))^{g(x)} \neq h_x(a)$. Hence $g(x) \neq 1$ in L_x.

Definition 4. *Let $\prod\limits_{x \in X} L_x$ denote the unrestricted product of the automorphism groups L_x. Let $K =$ kernel φ, and let $\psi : K \to \prod\limits_x L_x$ be the mapping of K into this product which assigns to $g \in K$ the element $(g(x))_{x \in X}$ in this product.*

Lemma 4. *If A is a strongly semisimple weakly Boolean ring, the mapping ψ is a monomorphism.*

This follows at once from Lemma 2 and 3; combining this with Lemma 1 yields the following:

Proposition 1. *Let G be the automorphism group of a strongly semisimple weakly Boolean ring A, let B be the Boolean ring of central idempotents of A, let X be the strong structure space of A, and let Y be the structure space of B. For each $x \in X$, let L_x be the automorphism group of the residue-class ring A/x. Then G is an extension of a subgroup of the unrestricted product $\prod_x L_x$ by a subgroup of $H(Y)$.*

This would appear to be about as much as one can say about the automorphism group of an otherwise unrestricted weakly Boolean ring. The first question which naturally arises is: When does this extension split as a semidirect product? In the sequel, we shall show that this happens for the class of function rings described above.

Let X be a Boolean space, let R be a (discrete) simple ring with identity, and let $C'(X, R)$ denote the set of all continuous functions from X to R which have compact support in X. We shall denote by $C(X, R)$ the family of *all* continuous functions from X to R. (A consistent notation will also be used when considering functions from X to a group). From Stone [6] we know that X may be identified with the structure space of the Boolean ring B, and since $C'(X, R)$ is a biregular ring, we know from Morrison [4] that X is the structure space of $A = C'(X, R)$.

Lemma 5. *For each $g \in G_B$, let $a^{\alpha(g)}(x) = a(\tau(g)x)$ for any $a \in A = C'(X, R)$ and any $x \in X$. Then $a^{\alpha(g)} \in C'(X, R)$, and $\alpha(g) \in G_A$.*

This is straightforward.

Lemma 6. *The mapping $\alpha\colon G_B \to G_A$ is a monomorphism.*

Proof. For $a \in A$, $x \in X$, and $g_1, g_2 \in G_B$, we have

$$a^{\alpha(g_1)\alpha(g_2)}(x) = a^{\alpha(g_1)}(\tau(g_2)x) = a(\tau(g_1)\,\tau(g_2)\,x) = a(\tau(g_1 g_2)\,x) = a^{\alpha(g_1 g_2)}(x)\,.$$

Hence α is a homomorphism. If $a^{\alpha(g)} = a$ for all $a \in A$, then $\tau(g)x = x$ for all $x \in X$, since A separates points of X. Since τ is a monomorphism, this means $g = 1$; hence α is one-one.

Lemma 7. *The composition $\varphi \circ \alpha$ is the identity on G_B, and $\varphi(G_A) = G_B$. Moreover, the mapping $\beta = \alpha \circ \varphi$ is an endomorphism of G_A, and satisfies $\beta^2 = \beta$.*

This is entirely obvious. This lemma immediately enables us to assert that G_A splits as a semidirect product (see, for example, Hofmann and Mostert [2]).

Theorem I. *Let X be a Boolean space, let R be a simple ring with identity, let G be the automorphism group of $A = C'(X, R)$, let L denote the automorphism group of R, and let H be the homeomorphism group of X. Then G contains a normal subgroup G_1 isomorphic to a subgroup of the unrestricted product L^X and a subgroup G_2 isomorphic with H such that $G = G_1 G_2$ and $G_1 \cap G_2 = \{1\}$; i.e., G is the semidirect product of G_1 and G_2.*

This is still not completely satisfactory, because the subgroup of L^X has not been identified. The natural conjecture is that G_1 is isomorphic to the family $C(X, L)$ of *all* continuous functions from X to the (discrete) automorphism group L of R. We are able to do this only under conditions which are almost identical with those Arens and Kaplansky [1, pp. 466–7] and Jacobson [3] found necessary to impose on a biregular ring in order to represent it as a ring of the form $C'(X, R)$. Their result is as follows:

Theorem (Arens-Kaplansky, Jacobson). *If A is a biregular ring with identity, all of whose residue-class rings modulo maximal ideals are isomorphic to the same simple ring R with identity, where R is finite dimensional over its center K, then $A \simeq C'(X, R)$, where X is the (compact) structure space of A.*

An analysis of their proof enables one to state a superficially more general formulation:

Proposition 2. *Let A be a biregular ring with structure space X. Suppose the following are satisfied:* (i) *for each $x \in X$, we have $A/x \simeq R$, where R is a fixed simple ring with identity;* (ii) *$(R:K)$ finite, where $(R:K)$ is the dimension of R over its center K;* (iii) *X is paracompact. Then $A \simeq C'(X, R)$.*

We omit the proof, since it is quite similar to the proof of Arens and Kaplansky and of Jacobson. The set of all limit ordinals less than the first uncountable ordinal, with the order topology, is a Boolean space which is not paracompact. Paracompactness is closely related to a concept introduced by Arens and Kaplansky in a similar context [1, p. 472]. Every Lindelöf space is paracompact, so that any countable Boolean ring has a paracompact Boolean structure space (since the space satisfies the second axiom of countability).

Theorem II. *Let $A = C'(X, R)$ be the ring of all continuous functions with compact support from the Boolean space X to the simple ring R with identity. Let P be the prime field of the center of R, and suppose $(R : P)$ is finite. Let L be the full automorphism group of R, and let $C(X, L)$ be the set of all continuous functions from X to the discrete group L, let $H(X)$ be the homeomorphism group of X, and let G be the full automorphism group of A. Then:* (i) *G contains a normal subgroup $G_1 \simeq C(X, L)$;* (ii) *G contains a subgroup $G_2 \simeq H(X)$;* (iii) *G is the semidirect product of G_1 and G_2; moreover, if $h \in G_1$ corresponds to $f \in C(X, L)$ and $h \in G_2$ corresponds to $\gamma \in H(X)$, the conjugate $h^{-1} g h$ corresponds to the function $x \to f(\gamma(x))$ of $C(X, L)$.*

Proof. We identify the points of X with the maximal ideals of A. For $x \in X$, define $h_x : A \to R$ by setting $h_x(a) = a(x)$ for each $a \in A$. Then, as in Lemma 2, we have $a^g(x) = (a(x))^{g(x)}$. (It is clear that any continuous function $x \to g(x)$ defines, in this way, an automorphism of A.) Let $\{r_i : i \in I\}$ be a basis for R over P, where the cardinality of I is finite. Let x_0 be a point in X. We shall show that the function $x \to g(x)$ is constant on some compact open neighborhood of x_0; this will show that the function $x \to g(x)$ is continuous, and, together with Theorem I, will complete the proof since the remainder of iii) is straightforward.

Let e be a characteristic function in B whose support U_e contains x_0. Then the function $x \to (r_i e)^g(x)$ is a continuous function for each $i \in I$, because g is an automorphism of A. Hence there is a compact open set U_i, $i \in I$, which contains x_0, such that the function $x \to (r_i e)^g(x)$ is constant on U_i. Let U be the intersection of all the sets U_i; the set U is compact open, since the cardinality of I is finite. Let f be the idempotent in B whose support is U. For $r \in R$, we have $r = \sum_{i \in I} p_i r_i$, where $p_i \in P$. Then, for any $x \in X$, we have

$$(rf)^g(x) = \left(\sum p_i r_i f\right)^g(x) = \left(\left(\sum p_i r_i f\right)(x)\right)^{g(x)} = \sum p_i\left((r_i f)(x)\right)^{g(x)} = \sum p_i (r_i f)^g(x).$$

But this function is constant on U. Since this holds for all $r \in R$, the function $x \to g(x)$ is necessarily constant on U. This proves the theorem.

Theorem II and Proposition 2 can obviously be combined to give a general result.

Theorem III. *Let A be a biregular ring with paracompact structure space X, all of whose residue-class rings modulo maximal ideals are isomorphic to the same simple ring R with identity, where R is finite dimensional over the prime field of its center. If G is the full automorphism group of A, if L is the full automorphism group of R, and if H is the homeomorphism group of X, then G is the semidirect product of a normal subgroup $G_1 \cong C(X, L)$ and a subgroup $G_2 \cong H$.*

It will be apparent what changes must be made in order to determine the group of automorphisms of a biregular ring over its center, rather than the full automorphism group.

The following special case of Theorem II may be worth recording explicitly, because of its interest in both topology and logic.

Corollary II.1. *Let X be a locally compact Boolean space, and let $GF(p)$ be the Galois field of prime order p. Then the automorphism group of $C'(X, GF(p))$ is isomorphic to the homeomorphism group $H(X)$.*

References

[1] R. ARENS and I. KAPLANSKY, Topological representation of algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 457—481 (1949).
[2] K. H. HOFMANN and P. S. MOSTERT, Splitting in topological groups. To appear.
[3] N. JACOBSON, Structure of rings. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. XXXVII, New York 1956.
[4] D. R. MORRISON, Bi-regular rings and the ideal lattice isomorphisms. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 46—49 (1955).
[5] C. E. RICKART, Banach algebras. Van Nostrand, New York 1960.
[6] M. H. STONE, The theory of representations for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 37—111 (1936).
[7] F. B. WRIGHT, A reduction for algebras of finite type. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 560—570 (1954).

Eingegangen am 27. 8. 1961

Anschrift der Autoren:

Karl Heinrich Hofmann
Mathematisches Institut der Universität
Tübingen, Wilhelmstraße 7

Fred B. Wright
Department of Mathematics
Tulane University
New Orleans 18 (Louis.), USA

A Note on the 'Primbasissatz'

By

M. Pavaman Murthy *)

In [1] it was proved that if A is a semilocal Cohen-Macaulay ring and $\mathfrak{p}$ a prime ideal of rank s contained in the radical such that $A_{\mathfrak{p}}$ is regular, then there exist elements $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{p}$ such that rank $(a_1, \ldots, a_s) = s$ and $(a_1, \ldots, a_s)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$. The aim of this note is to prove that this result is true for any commutative noetherian ring A with unit element and any prime ideal $\mathfrak{p}$ such that $A_{\mathfrak{p}}$ is regular. In fact we shall prove the following slightly more general result.

Theorem. *Let A be a commutative noetherian ring with unit element and $\mathfrak{p}$ a prime ideal of rank s. Let $\mathfrak{q}$ be a $\mathfrak{p}$-primary ideal and let n be the dimension of $\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ as a vector space over $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$. Then there exist elements $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{q}$ such that $(a_1, \ldots, a_n)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$ and* rank $(a_1, \ldots, a_s) = s$. *Further the a_i can be chosen from a minimal set of generators for $\mathfrak{q}$.*

We first prove two lemmas. In what follows A always stands for a commutative noetherian ring with unit element.

Lemma 1. *Let $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ be prime ideals of A such that $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ for $i \neq j$. Let $y_1, \ldots, y_r$ be elements of A such that*

(I) $y_1 \in \mathfrak{p}_i$ *for some* i, $1 \leqq i \leqq l$,

(II) $(y_1, \ldots, y_r) \notin \bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$.

Then there exist elements $a_2, \ldots, a_r$ in A such that

$$y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_r y_r \notin \bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j .$$

Proof. Choose $x_i \in \mathfrak{p}_i$ such that $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ for $i \neq j$. Bevause of (II) for every $\mathfrak{p}_i$ there exists a $y_{\nu(i)}$, $1 \leqq \nu(i) \leqq l$, such that $y_{\nu(i)} \notin \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, l$. We may assume $y_1 \in \mathfrak{p}_i$, $1 \leqq i \leqq t$, and $y_1 \notin \mathfrak{p}_j$, $t + 1 \leqq j \leqq l$. Set

$$a_i = \prod_{j \neq i} x_j, \quad 1 \leqq i \leqq t .$$

It is immediate that

$$y_1 + a_1 y_{\nu(1)} + \cdots + a_t y_{\nu(t)} \notin \bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j .$$

---

*) My thanks are due to Dr. C. S. Seshadri and Mr. C. P. Ramanujam for helpful suggestions.

Corollary 1. *Let x be an element in A not contained in $\bigcap_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$ and let $y \in A$. Then there exists $\lambda \in A$ such that $\lambda x + y \notin \mathfrak{p}_j$ for any j.*

Proof. If $y \notin \bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$, choose $\lambda = 0$. Otherwise apply Lemma 1 to the ideal (y, x).

Corollary 2. *The ideal $\mathfrak{a} = (y_1, \ldots, y_r)$ in Lemma 1 can be generated by r elements which do not lie in $\bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$.*

Proof. By Lemma 1 we may assume $y_1 \notin \bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$ and λ_i, $2 \leq i \leq r$, such that $\lambda_i y_1 + y_i \notin \bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$. Then $\mathfrak{a} = (y_1, \lambda_2 y_1 + y_2, \ldots, \lambda_r y_1 + y_r)$, q.e.d.

Let $\mathfrak{a}$ be any ideal of A. We denote by $n(\mathfrak{a})$ the least integer d such that $\mathfrak{a}$ can be generated by d elements.

Remark. *The ideal $\mathfrak{a} = (y_1, \ldots, y_r)$ in Lemma 1 can be generated by $n(\mathfrak{a})$ elements not lying in $\bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$.*

Observing that in a noetherian ring the set of zero divisors is precisely the union of the maximal prime ideals associated to (0), we have

Corollary 3. *Let $\mathfrak{a}$ be an ideal containing a non-zero divisor. Then $\mathfrak{a}$ can be generated by non-zero divisors.*

Lemma 2. *Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal in A of rank $s \geqq 1$. Let $\mathfrak{q}$ be a $\mathfrak{p}$-primary ideal such that the dimension of $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ as a vector space over $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ is equal to n. Then there exist $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{q}$ not contained in any of the minimal prime ideals associated to (0) such that $(a_1, \ldots, a_n)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$. These a_i can be chosen from a minimal set of generators of $\mathfrak{q}$ containing $n(\mathfrak{q})$ elements.*

Proof. Let $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ be the minimal prime ideals associated to (0). As rank $\mathfrak{q} \geqq 1$, we have $\mathfrak{q} \not\subset \bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$. Therefore by the remark after Corollary 2 there exist $a_i \in \mathfrak{q}$, $a_i \notin \bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$, $1 \leqq i \leqq n(\mathfrak{q})$, such that $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_{n(\mathfrak{q})})$.

It is well known that for a module of finite type M over a local ring A, elements $x_1, \ldots, x_n \in M$ form a minimal set of generators for M if and only if $x_i \bmod \mathfrak{m}M$, $1 \leq i \leq n$, form a basis for the vector space $M/\mathfrak{m}M$ over $A/\mathfrak{m}$ where $\mathfrak{m}$ is the maximal ideal of A. Now as the dimension of the vector space $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ over $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ is n, we can choose n elements among the a_i say $a_1, \ldots, a_n$ with $(a_1, \ldots, a_n)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$, q.e.d.

We shall now prove the theorem by induction on s.

Proof of the Theorem. Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of rank s and $\mathfrak{q}$ a $\mathfrak{p}$-primary ideal such that the dimension of the vector space $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ is equal to n. Let $s = 0$. Choose elements $a_1, \ldots, a_{n(\mathfrak{q})}$ to generate $\mathfrak{q}$. Among these a_i we can choose $a_1, \ldots, a_n$

such that $(a_1, \ldots, a_n)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$ and rank $(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Let $s > 0$. Assume that for all prime ideals $\mathfrak{p}$ of rank $d < s$ and for all $\mathfrak{p}$-primary ideals $\mathfrak{q}$ there exist elements $a_1, \ldots, a_{n(\mathfrak{q})}$ which generate $\mathfrak{q}$ and from the a_i we can choose elements $a_1, \ldots,$ $a_m \in \mathfrak{q}$ such that $(a_1, \ldots, a_m)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$ and rank $(a_1, \ldots, a_m) = d$ where m is the dimension of the vector space $\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$ over $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$. By Lemma 2, we can choose elements $a_1, \ldots, a_{n(\mathfrak{q})}$ generating $\mathfrak{q}$ and not in any minimal prime ideal associated to (0), such that $(a_1, \ldots, a_n)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$. Consider the ring $\overline{A} = A/(a_1)$. We shall denote the image in A of any ideal $\mathfrak{a}$ (respectively an element x) of A by $\overline{\mathfrak{a}}$ (respectively $\overline{x}$). We have $\overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}} = A_{\mathfrak{p}}/a_1 A_{\mathfrak{p}}$. As a_1 is not contained in any of the minimal prime ideals associated to (0), rank $\overline{\mathfrak{p}} = \dim \overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}} = s - 1$. The elements $a_1, \ldots, a_n \bmod \mathfrak{q}\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ form a basis for $\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ as a vector space over $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ and we have

$$\dim_{(\overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}}/\overline{\mathfrak{p}}\overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}})} (\overline{\mathfrak{q}}\, \overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}}/\overline{\mathfrak{q}}\, \overline{\mathfrak{p}}\, \overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}}) = \dim_{(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}})} (\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}\,\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} + a_1 A_{\mathfrak{p}}) = n - 1\,.$$

Therefore by induction hypothesis there exist $x_1, \ldots, x_{n(\overline{\mathfrak{q}})} \in A$ such that $\overline{x}_1, \ldots,$ $\overline{x}_{n(\overline{\mathfrak{q}})}$ generate $\overline{\mathfrak{q}}$ and $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1})_{\overline{\mathfrak{p}}} = \overline{\mathfrak{q}}\, \overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ with rank $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}) = s - 1$. Hence $(a_1, x_1, \ldots, x_{n-1})_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$ and by our choice of a_1, rank $(a_1, x_1, \ldots, x_{n-1}) = s$. Since $n(\overline{\mathfrak{q}}) \le n(\mathfrak{q}) - 1$ and $a_1, x_1, \ldots, x_{n(\overline{\mathfrak{q}})}$ generate $\mathfrak{q}$. Hence $a_1, x_1, \ldots x_{n(\overline{\mathfrak{q}})}$ is a minimal set of generators for $\mathfrak{q}$ and $n(\overline{\mathfrak{q}}) = n(\mathfrak{q}) - 1$.

Since in a local ring of dimension s there exists a primary ideal generated by s elements and associated to the maximal ideal (see [2]), we immediately have

Corollary 1. *If A and $\mathfrak{p}$ are as in the theorem there exist s elements $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{p}$ such that* rank $(a_1, \ldots, a_s) = s$ *and $(a_1, \ldots, a_s)_{\mathfrak{p}}$ is $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ primary.*

In the theorem if we take $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ and $A_{\mathfrak{p}}$ regular we get (see [1])

Corollary 2. *Let $A_{\mathfrak{p}}$ be regular. Then there exist elements $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{p}$ such that*

$$\text{rank } (a_1, \ldots, a_s) = s \textit{ and } (a_1, \ldots, a_s)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}\,.$$

Further the a_i can be chosen from a minimal set of generators of $\mathfrak{p}$.

Remark. If the ring A in the theorem is Cohen-Macaulay, then the a_i form an A-sequence (see [2]).

We recall (see [2]) that in a commutative noetherian ring A the elements $a_1, \ldots,$ $a_s \in A$ form an *A-sequence* if a_{i+1} is not a zero divisor in $A/(a_1, \ldots, a_i)$, $i = 0, 1, \ldots,$ $s - 1$, (we take $a_0 = 0$). It can be proved that in a local ring A all the maximal A-sequences have the same length and that this length cannot exceed the dimension of the local ring A. If the length of any maximal A-sequence is equal to the dimension of the local ring A, we say that A is *Cohen-Macaulay*. We say that a commutative noetherian ring A is Cohen-Macaulay if each $A_{\mathfrak{m}}$ is Cohen-Macaulay of the same dimension for every maximal ideal $\mathfrak{m}$ of A.

We have the following strengthening of Primbasissatz (see [2]) in case $A_{\mathfrak{p}}$ is regular.

Corollary 3. *Under the hypothesis of Corollary 2, there exist elements $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{p}$ such that* rank $(a_1, \ldots, a_s) = s$ *and $\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_s) : t$ with $t \notin \mathfrak{p}$.*

Proof. Let $b_1, \ldots, b_m$ generate $\mathfrak{p}$. Choose the elements $a_1, \ldots, a_s$ by Corollary 2. Since $(a_1, \ldots, a_s)_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$, there exist $t_i \notin \mathfrak{p}$ such that $t_i b_i \in (a_1, \ldots, a_s)$, $1 \leqq i \leqq m$. Set $t = \prod_{i=1}^{m} t_i$. Then $\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_s) : t$.

References

[1] H. J. Nastold, Zum Primbasissatz in regulären lokalen Ringen. Arch. Math. **12**, 30–33 (1961).
[2] J. P. Serre, Algèbre Locale — Multiplicités. Cours au Collège de France 1957–1958.

Eingegangen am 22. 8. 1961

Anschrift des Autors:
M. Pavaman Murthy
School of Mathematics
Tata Institute of
Fundamental Research
Colaba
Bombay 5, India

Ein metrischer Satz über die Gleichverteilung mod 1

Von

Walter Philipp[1])

Es gilt bekanntlich

Satz 1. *Ist A eine ganzzahlige m-zeilige Matrix mit $|\det(A)| \geqq 1$ und ist kein Eigenwert von A eine Einheitswurzel, dann ist die Folge $\{A^n \mathfrak{x}\}$ gleichverteilt* mod 1 *für fast alle*

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung eines Ergebnisses von Rochlin [4] (siehe auch [1]). In der vorliegenden Arbeit wird dieser Satz verallgemeinert; und zwar beweisen wir den folgenden

Satz 2. *Es sei A eine beliebige reelle nichtsinguläre m-zeilige Matrix, deren Eigenwerte λ_i $(1 \leqq i \leqq m)$ sämtlich den Betrag $|\lambda_i| > 1$ besitzen. Ferner sei $l_1 \leqq l_2 \leqq \cdots \leqq l_n \leqq$ $\leqq \cdots$ eine Folge natürlicher Zahlen. Gibt es zwei positive Konstanten ε und c derart, daß l — als Funktion des Index betrachtet — wenigstens um c zunimmt, wenn der Index von n ab um $n/(\log n)^{1+\varepsilon}$ wächst, dann ist die Folge $\{A^{l_n} \mathfrak{x}\}$ gleichverteilt* mod 1 *für fast alle $\mathfrak{x}$. Ist überdies A symmetrisch und sind alle ihre Eigenwerte positiv, so bleibt die Behauptung richtig, wenn die Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ beliebig reell sind.*

Bemerkung. Wie das Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

zeigt, kann die Voraussetzung $|\lambda_i| > 1$ nicht durch eine schwächere ersetzt werden.

In seiner Arbeit [3] bewies E. Hlawka verschiedene Gleichverteilungssätze unter Zugrundelegung allgemeiner Summationsverfahren. Wie man leicht sieht, kann man auch den vorhergehenden Satz in dieser Richtung verallgemeinern. Wir wollen nicht näher darauf eingehen und begnügen uns mit folgendem Satz, dessen Beweis analog wie der des vorhergehenden Satzes geführt wird.

Satz 3. *Es sei $B = (b_{nh})$ eine Toeplitz-Matrix mit*

$$\sum_{h=1}^{\infty} b_{nh}^2 = \gamma_n \quad \textit{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n^k} < \infty$$

[1]) Für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Hinweise möchte ich Herrn Dr. J. Cigler meinen herzlichsten Dank aussprechen.

für ein k; schließlich sei $l_1 < l_2 < \cdots < l_n < \cdots$ eine Folge natürlicher Zahlen. Ist A eine beliebige reelle nichtsinguläre m-zeilige Matrix, deren Eigenwerte λ_i $(1 \leqq i \leqq m)$ sämtlich den Betrag $|\lambda_i| > 1$ besitzen, dann ist die Folge $\{A^{l_n}\mathfrak{x}\}$ B-gleichverteilt mod 1 *für fast alle $\mathfrak{x}$.*

Satz 2 ist eine teilweise Verallgemeinerung eines Gleichverteilungssatzes von H. Weyl auf den m-dimensionalen Fall (siehe [5]).

Für die verwendeten Sätze und Definitionen aus dem Gebiet der Gleichverteilung siehe [2].

Wir beweisen nun mit Hilfe des Weylschen Kriteriums den folgenden

Hilfssatz. *Es sei $\{A_n\}$ eine Folge ganzzahliger m-zeiliger Matrizen mit $|\det(A_n)| \geqq 1$ und es sei genau h_k mal* $\det(A_j - A_k) = 0$ $(1 \leqq j, k \leqq n)$. *Gibt es zwei positive Konstanten c und ε, so daß*

$$\max_{1 \leq k \leq n} h_k = h^{(n)} \leqq \frac{c \cdot n}{(\log n)^{1+\varepsilon}}, \tag{1}$$

dann ist die Folge $\{A_n\mathfrak{x}\}$ gleichverteilt mod 1 *für fast alle $\mathfrak{x}$.*

Bemerkung. Satz 1 ist als Spezialfall im Hilfssatz enthalten. Denn ist speziell $A_n = A^n$, dann ist $h^{(n)} = 1$ für alle n, da $\det(A^j - A^k) \neq 0$ für $k \neq j$ gleichbedeutend damit ist, daß kein Eigenwert von A eine Einheitswurzel ist.

Beweis. Wir bezeichnen mit

$$f_n(\mathfrak{x}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} e(\mathfrak{t}^* A_k \mathfrak{x}),$$

wo $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{o}$ ein beliebiger ganzzahliger Vektor und $\mathfrak{t}^*$ der transponierte von $\mathfrak{t}$ ist; dabei ist $e(x) = e^{2\pi i x}$.

Wir betrachten nun

$$\int_E |f_n(\mathfrak{x})|^2 \, d\mathfrak{x} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_E e(\mathfrak{t}^*(A_k - A_j)\mathfrak{x}) \, d\mathfrak{x}$$

mit $E(0 \leqq x_j < 1, j = 1, \ldots, m)$.

Wegen (1) gilt

$$\int_E |f_n(\mathfrak{x})|^2 \, d\mathfrak{x} \leqq \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} h_k \leqq \frac{h^{(n)}}{n} \leqq \frac{c}{(\log n)^{1+\varepsilon}}.$$

Fast wörtlich wie in [5] zeigt man

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\mathfrak{x}) = 0$$

für fast alle $\mathfrak{x}$.

Wir ersetzen nun $\mathfrak{x}$ durch $\frac{1}{N}\mathfrak{x}$, wo N eine beliebige natürliche Zahl ist. Damit haben wir den Fall betrachtet, in dem die Folge $\{A_n\}$ die Gestalt $\{N^{-1} \cdot B_n\}$ $(B_n, \ldots$ ganzzahlig) besitzt, wobei B_n die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt.

Wir beweisen zunächst Satz 2 für den Fall, daß A symmetrisch und $\lambda_i > 1$ ist. A läßt sich dann in der Form $A = U^{-1} \Lambda U$ schreiben, wobei $\det(U) = \pm 1$ und

$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$ eine Diagonalmatrix ist. Ist r eine beliebige reelle Zahl, dann wollen wir unter A^r die Matrix $A^r = U^{-1}\Lambda^r U$ verstehen, wobei $\Lambda^r = [\lambda_1^r, \ldots, \lambda_m^r]$.

Ist $X = (x_{ij})$ eine m-zeilige Matrix, dann schreiben wir

$$\| X \| = m \cdot \max |x_{ij}|.$$

Für zwei Matrizen X, Y gilt dann

(2) $$\| X + Y \| \leqq \| X \| + \| Y \| \quad \text{und} \quad \| XY \| \leqq \| X \| \cdot \| Y \|.$$

Ferner gilt für jeden Vektor $\mathfrak{x}$

(3) $$| X \mathfrak{x} | \leqq m^{1/2} \| X \| \cdot | \mathfrak{x} |.$$

Wir bestimmen nun Matrizen A_n mit rationalen Elementen, alle mit dem Nenner N, so daß

(4) $$\| A_n \dot{-} A^{l_n} \| \leqq \frac{m}{2N},$$

also

(4') $$\| A_n - U^{-1} \Lambda^{l_n} U \| \leqq \frac{m}{2N}.$$

Wir schreiben für $l_n \neq l_k$

$$\Omega_k = (\Lambda^{l_n} - \Lambda^{l_k})^{-1} (U A_n U^{-1} - U A_k U^{-1}).$$

Da

$$\| (\Lambda^{l_n} - \Lambda^{l_k})^{-1} \| = O(1),$$

gilt wegen (2) und (4')

$$\| \Omega_k - E \| = O(N^{-1}) \qquad (E = \text{Einheitsmatrix})$$

und somit

$$\det(\Omega_k) = 1 + O(N^{-1}).$$

Daher ist

$$|\det(\Lambda^{l_n} - \Lambda^{l_k}) - \det(A_n - A_k)| = |\det(\Lambda^{l_n} - \Lambda^{l_k})| \cdot O(N^{-1}).$$

Wir wählen N so groß, daß $O(N^{-1}) \leqq 1/2$. Dann folgt aus der letzten Ungleichung

$$|\det(A_n - A_k)| \geqq 1/2 \, |\det(\Lambda^{l_n} - \Lambda^{l_k})| \neq 0 \quad \text{für} \quad l_n \neq l_k.$$

Ebenso zeigt man $\det(A_n) \neq 0$ für alle n.

Da wegen (4) die Matrizen A_n eindeutig bestimmt sind, folgt daraus, daß genau dann $\det(A_n - A_k) = 0$, wenn $l_n = l_k$. Nach Voraussetzung gibt es aber unter den ersten n Zahlen l_n höchstens $n/(\log n)^{1+\varepsilon}$ untereinander gleiche. Nach dem Hilfssatz gilt dann für die Folge $\{A_n \mathfrak{x}\}$

(5) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e(\mathfrak{t}^* A_k \mathfrak{x}) = 0$$

für fast alle $\mathfrak{x}$.

Da für reelle r_j, s_j, x_j $(1 \leqq j \leqq m)$

$$|e(r_1 x_1 + \cdots + r_m x_m) - e(s_1 x_1 + \cdots + s_m x_m)| \leqq 2\pi \sum_{j=1}^{n} |r_j - s_j| \, |x_j|$$

gilt, haben wir wegen (3) und (4)

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(\mathfrak{t}^* A_k \mathfrak{x}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(\mathfrak{t}^* A^{l_k}\mathfrak{x})\right| \leq \max_{1\leq k\leq n} |e(\mathfrak{t}^* A_k \mathfrak{x}) - e(\mathfrak{t}^* A^{l_k}\mathfrak{x})| \leq$$
$$\leq 2\pi X m^{1/2} \max_{1\leq k\leq n} |\mathfrak{t}^*(A_k - A^{l_k})| \leq$$
$$\leq 2\pi X m \cdot \max_{1\leq k\leq n} \| A_k - A^{l_k}\| \cdot |\mathfrak{t}^*| < \pi X m^2 T \cdot N^{-1},$$

wobei $X = \max_{1\leq j\leq m} |x_j|$ und $T = |\mathfrak{t}|$.

Daraus folgt

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(\mathfrak{t}^* A^{l_k}\mathfrak{x})\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(\mathfrak{t}^* A_k \mathfrak{x})\right| + \pi X m^2 T \cdot N^{-1}.$$

Wir bezeichnen die Menge der $\mathfrak{x}$, für die (5) nicht gilt, mit $\mathfrak{A}_N$. Ihr Lebesguesches Maß $m(\mathfrak{A}_N)$ ist $m(\mathfrak{A}_N) = 0$. Da N beliebig war, existiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(\mathfrak{t}^* A^{l_k}\mathfrak{x}) = 0$$

für alle $\mathfrak{x}$, die in allen $\mathfrak{A}_N$, endlich viele ausgenommen, liegen.

Da Δ eine Diagonalmatrix ist, hätte man Satz 2 für symmetrische Matrizen auf den eindimensionalen Fall zurückführen können. Die obige Methode kann man aber auch bei beliebigen Matrizen anwenden. Wir wollen dies jetzt näher ausführen.

A läßt sich in der kanonischen Darstellung

$$A = U^{-1}[I_{\varrho_1}(\lambda_1), \ldots, I_{\varrho_r}(\lambda_r)]\, U$$

schreiben, wobei $\det(U) = \pm 1$ und die $I_{\varrho_i}(\lambda_i)$ die Jordanschen Kästchen

$$I_{\varrho_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & & & \cdot & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

sind. Wir schreiben

$$\Delta_\varrho = [I_{\varrho_1}(\lambda_1), \ldots, I_{\varrho_r}(\lambda_r)].$$

Durch Rechnung zeigt man, daß für $l_n \neq l_k$

$$\| (\Delta_\varrho^{l_n} - \Delta_\varrho^{l_k})^{-1} \| = O(1).$$

Völlig analog zu dem Fall, daß A symmetrisch ist, verläuft der Beweis, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(\mathfrak{t}^* A^{l_k}\mathfrak{x}) = 0$$

für fast alle $\mathfrak{x}$.

Literaturverzeichnis

[1] J. Cigler, Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung mod 1. J. reine angew. Math. **205**, 91—100 (1960).
[2] J. Cigler und G. Helmberg, Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **64**, 1—50 (1961).
[3] E. Hlawka, Folgen auf kompakten Räumen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **20**, 223—241 (1956).
[4] W. A. Rochlin, Über Endomorphismen von kompakten abelschen Gruppen. Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Ser. mat. **13**, 329—340 (1949) (russisch).
[5] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. **77**, 313—352 (1916).

Eingegangen am 18. 9. 1961

Anschrift des Autors:
Walter Philipp
Mathematisches Institut der Universität
Wien

On a Theorem of Isbell Concerning Extremally Disconnected *P*-spaces

By

R. L. Blair

A completely regular space X is *extremally disconnected* in case every open set in X has an open closure; and X is a *P-space* in case every function in $C(X)$ is constant on some neighborhood of each point[1]). A cardinal $\mathfrak{m}$ is *nonmeasurable* in case for any nonzero countably additive $\{0, 1\}$-valued measure μ defined on the collection of all subsets of a set S of cardinal $\mathfrak{m}$ there exists an element $x \in S$ such that $\mu(\{x\}) = 1$. The following result is due to J. R. Isbell [2, Theorem 2.4]:

Theorem (Isbell). *If X is an extremally disconnected P-space of nonmeasurable cardinal, then X is discrete*[2]).

Isbell's proof relies on an unpublished result due to him and S. Ginsburg (see [2]); a second proof (obtained jointly by L. Gillman, M. Henriksen, and M. Jerison) is outlined in Problem 12H of [1]. We give below another proof which, while similar in certain respects to that of [1], seems conceptually rather simpler.

Proof. Since the hypotheses on X are inherited by vX (see [1, 6M.*1*, 1H.*4*, 8A.*5*, and 12.5]), we may assume that X is realcompact. Assuming that X has a nonisolated point p, Zorn's lemma provides a family $(Y_\alpha)_{\alpha \in I}$ of disjoint open-and-closed subsets of X such that $Y = \bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha$ is dense in X and $p \notin Y$. Since Y is dense in the extremally disconnected space X, we have $X \subset \beta Y$ [1, 6M]. Now each Y_α, being a closed subspace of a realcompact space, is realcompact [1, 8.10]; hence Y, as the topological sum of nonmeasurably many realcompact spaces, is realcompact [1, 12G]. Then, since $p \in \beta Y - Y$, there exists a strictly positive bounded function in $C(Y)$ whose extension over βY vanishes at p [1, p. 119]. This is an obvious contradiction.

References

[1] L. Gillman and M. Jerison, Rings of continuous functions. Princeton, Van Nostrand 1960.
[2] J. R. Isbell, Zero-dimensional spaces. Tôhoku Math. J., II. Ser. **7**, 1—8 (1955).

Eingegangen am 24. 9. 1961

Anschrift des Autors:
R. L. Blair, Division of Mathematical Sciences, Purdue University, West Lafayette (Ind.), USA

---

[1]) Our notation and terminology are that of [1]. In particular, $C(X)$ is the set of all real-valued continuous functions on X and βX and vX are, respectively, the Stone-Čech compactification and the Hewitt realcompactification of X.

[2]) As noted in [1, 12 H. *7*], an extremally disconnected P-space of measurable cardinal need not be discrete. For an extensive discussion of nonmeasurable cardinals (no measurable ones are known to exist), see [1, Chapter 12].

On Functional Cup-Products and the Transgression Operator

By

EMERY THOMAS[1])

1. Introduction. Let g be a map from a topological space X to a topological space Y. Take cohomology groups with coefficients in a fixed ring R and denote by g^* the homomorphism from $H^*(Y)$ to $H^*(X)$ induced by g. Suppose that $u \in H^{p+1}(Y)$ and $v \in H^{q+1}(Y)$ are elements such that $u \smile v = 0$ and either $g^* u = 0$ or $g^* v = 0$. Then STEENROD [6] has defined a functional cup-product

$$u \underset{g}{\smile} v \in H^{p+q+1}(X) \bmod L(g, u, v),$$

where[2])

$$L(g, u, v) = g^* H^{p+q+1}(Y) + g^* u \smile H^q(X) + H^p(X) \smile g^* v.$$

Suppose now that X and Y are the total spaces of respective proper triads and that g is a triad map. The purpose of this paper is to show that it is then possible, in certain cases, to express the functional cup-product in terms of an ordinary cup-product. We apply this to obtain a classical result about the Hopf invariant and to obtain some new information about the cohomology rings of certain classifying spaces.

Assume then that $(X; X_0, X_1)$ and $(Y; Y_0, Y_1)$ are proper triads [3; Chap. I, § 14] and that g is a triad map. Denote by

$$g_j : (X, X_j) \to (Y, Y_j) \quad (j = 0,1)$$

the map determined by g and set

$$A = X_0 \cap X_1, \quad B = Y_0 \cap Y_1, \quad f = g|A.$$

For the remainder of this section assume that $X = X_0 \cup X_1$ and $Y = Y_0 \cup Y_1$. One then has the (absolute) Mayer-Vietoris cohomology sequence [3; Chap. I., § 15] for each triad, which contains the coboundary

$$\Delta : H^r(A) \to H^{r+1}(X) \quad (r \geqq 0),$$

with a similar coboundary for Y. For elements $u_j \in H^*(X_j)$ $(j = 0,1)$ we set

$$u_0 * u_1 = \Delta(\pi_0^* u_0 \smile \pi_1^* u_1) \in H^*(X),$$

where π_j^* denotes the homomorphism induced by the inclusion $A \subset X_j$ $(j = 0,1)$.

---

1) Fellow of the John Simon Guggenheim Foundation. This research was partially supported by the Air Force Office of Scientific Research.

2) If $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are subgroups of an abelian group B, we denote by $A_1 + \cdots + A_n$ the smallest subgroup of B containing all the A_i.

We will say that an element $x \in H^p(X_i)$ $(i = 0$ or $1)$ is *transgressive* (with respect to g) if there is an element $y \in H^{p+1}(Y, Y_i)$ such that

$$\delta_i x = g_i^* y,$$

where δ_i denotes the relative coboundary $H^p(X_i) \to H^{p+1}(X, X_i)$. We will say that the element $n_i^* y \in H^{p+1}(Y)$ *represents the transgression of* x, where n_i^* is induced by the inclusion $Y \subset (Y, Y_i)$. Of course the representative is determined only up to the image by n_i^* of the kernel of g_i^*.

We shall prove

Theorem 1.1. *Let $x_i \in H^p(X_i)$ $(i = 0$ or $1)$ be an element that is transgressive and let $w_i \in H^{p+1}(Y)$ represent its transgression. Let $v \in H^q(B)$ be an element such that*

$$f^* v = \sum_a \pi_0^* v_a \smile \pi_1^* v_a',$$

where $v_a \in H^*(X_0)$, $v_a' \in H^*(X_1)$ and f^* is induced by f. Then,

$$g^* w_i = 0,\ w_i \smile \Delta v = 0 = \Delta v \smile w_i,$$

and

$$w_0 \underset{g}{\smile} \Delta v \equiv \sum_a (-1)^{p+1} (x_0 \smile v_a) * v_a' \bmod L(g, w_0, \Delta v) \quad (\textit{if } i = 0),$$

$$\Delta v \underset{g}{\smile} w_1 \equiv \sum_a (-1)^q v_a * (v_a' \smile x_1) \bmod L(g, \Delta v, w_1) \quad (\textit{if } i = 1).$$

We will say that an element $v \in H^q(B)$ is *primitive* (with respect to f) if

$$f^* v = \pi_0^* v_0 + \pi_1^* v_1,$$

where $v_j \in H^q(X_j)$ $(j = 0,1)$. We term the element v_j a projection of v on X_j. In the Mayer-Vietoris sequence for X the kernel of Δ is the subgroup spanned by the image of π_0^* and π_1^*. Since g is a triad map we have the commutativity relation $g^* \Delta = \Delta f^*$, and therefore: *an element $v \in H^q(B)$ is primitive if, and only if, $g^* \Delta v = 0$.* Thus as a special case of Theorem 1.1 we obtain

Corollary 1.2. *Let x_i and w_i $(i = 0$ or $1)$ be the elements given in Theorem 1.1. Let $v \in H^q(B)$ be a primitive element with projection v_j on X_j $(j = 0,1)$. Then*

$$g^* w_i = 0,\ \ g^* \Delta v = 0,\ \ w_i \smile \Delta v = 0 = \Delta v \smile w_i,$$

and

$$w_0 \underset{g}{\smile} \Delta v \equiv (-1)^{p+1} x_0 * v_1 \bmod g^* H^{p+q+1}(Y) \quad (\textit{if } i = 0),$$

$$\Delta v \underset{g}{\smile} w_1 \equiv (-1)^q v_0 * x_1 \bmod g^* H^{p+q+1}(Y) \quad (\textit{if } i = 1).$$

Suppose now that $u \in H^p(B)$ is a primitive element with projection u_j on X_j $(j = 0,1)$. One may then show that u_j is transgressive and that $\varepsilon_j \Delta u$ represents its transgression, where $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$. Thus from Corollary 1.2 we obtain

Corollary 1.3. *Let $u \in H^p(B)$ and $v \in H^q(B)$ be primitive elements with respective projections u_j and v_j on X_j $(j = 0,1)$. Then*

$$g^* \Delta u = 0,\ g^* \Delta v = 0,\ \Delta u \smile \Delta v = 0,$$

and

$$\Delta u \underset{g}{\smile} \Delta v \equiv (-1)^p u_0 * v_1 \bmod g^* H^{p+q+1}(Y).$$

Denote by $\hat{Y}$ the cone on X attached to Y by the map g. One then has an exact sequence (see [1; § 3])

$$\cdots \longrightarrow H^q(\hat{Y}) \xrightarrow{j^*} H^q(Y) \xrightarrow{g^*} H^q(X) \xrightarrow{\mu} H^{q+1}(\hat{Y}) \longrightarrow \cdots,$$

where j^* is induced by the inclusion $Y \subset \hat{Y}$ and μ is a Mayer-Vietoris coboundary. Let x_i, w_i ($i = 0$ or 1) and v be the elements given in Corollary 1.2, and let u be the element given in Corollary 1.3. Since $g^* w_i = g^* \Delta u = g^* \Delta v = 0$, by exactness there are elements

$$\hat{w}_i,\ \hat{u} \in H^{p+1}(\hat{Y}),\ \hat{v} \in H^{q+1}(\hat{Y})$$

such that

$$j^* \hat{w}_i = w_i,\ j^* \hat{u} = \Delta u,\ j^* \hat{v} = \Delta v.$$

Corollary 1.4.

(a) $\mu(u_0 * v_1) = (-1)^p \hat{u} \smile \hat{v}$.

(b) $\mu(x_0 * v_1) = (-1)^{p+1} \hat{w}_0 \smile \hat{v}$ (*if* $i = 0$),

$\mu(v_0 * x_1) = (-1)^q \hat{v} \smile \hat{w}_1$ (*if* $i = 1$).

The proof follows from Corollaries 1.2, 1.3 and the formulation of the functional cup-product due to ADEM [1; § 4].

In the following section we give two applications of these results, while the remaining sections of the paper are devoted to the proof of Theorem 1.1.

2. Applications. Our examples will use the join construction. Let A_0 and A_1 be topological spaces. We define their join, $A_0 * A_1$, to be the set of points $t_0 a_0 + t_1 a_1$, where $a_j \in A_j$, $t_j \geqq 0$, and $t_0 + t_1 = 1$. This set is topologized by the *strong* topology, defined by MILNOR in [4]. Thus we obtain the proper triad $(A_0 * A_1, \bar{A}_0, \bar{A}_1)$, where $\bar{A}_0$ is the set of points $(1-t)\, a_0 \oplus t a_1$ with $t \leqq 1/2$ and $\bar{A}_1$ is the similar set of points with $t \geqq 1/2$. Identify the spaces A_0, A_1, and $A_0 \times A_1$ with the subspaces of $A_0 * A_1$ consisting of all points $(1-t)\, a_0 \oplus t a_1$ with $t = 0$, $t = 1$, and $t = 1/2$ respectively. Then A_j is a deformation retract of $\bar{A}_j$ and $A_0 \times A_1 = \bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$. If we compose the inclusion $A_0 \times A_1 \subset \bar{A}_j$ with the deformation retract $\bar{A}_j \to A_j$, we obtain the natural projection $\pi_j : A_0 \times A_1 \to A_j$ ($j = 0,1$).

For our first application of the results of section 1 denote by S_0^n and S_1^n two copies of the n-sphere S^n ($n \geqq 1$). We identify S^{2n+1} with its homeomorph $S_0^n * S_1^n$ and obtain the triad $(S^{2n+1}, \bar{S}_0^n, \bar{S}_1^n)$, where $S_0^n \times S_1^n = \bar{S}_0^n \cap \bar{S}_1^n$. Pick generators $u_j \in H^n(S_j^n)$ (integer coefficients) and denote by $\bar{u}_j$ the corresponding element in $H^n(\bar{S}_j^n)$ ($j = 0,1$). Then $\bar{u}_0 * \bar{u}_1$ is a generator for $H^{2n+1}(S^{2n+1})$.

Consider now the suspension triad $(\hat{S}^n, C_0, C_1)$, where $\hat{S}^n$ is obtained from $S^n \times [0,1]$ by identifying $\{j\} \times {}_u S$ to a point x_j ($j = 0,1$), and where C_j is the cone $S^n \times [j, 1/2]$. Identify S^n with $C_0 \cap C_1$, and S^{n+1} with $\hat{S}^n$.

Let m be a map from $S_0^n \times S_1^n$ to S^n. Then m determines a triad map

$$\hat{m}: (S^{2n+1}, \overline{S}_0^n, \overline{S}_1^n) \to (S^{n+1}, C_0, C_1),$$

by

$$\hat{m}(t_0 s_0 \oplus t_1 s_1) = (m(s_0, s_1), t_1)$$

for $s_j \in S_j^n$, $t_j \geqq 0$, and $t_0 + t_1 = 1$.

Let $e_j \in S_j^n (j = 0,1)$ be a basepoint and define a map $f_j : S_j^n \to S_0^n \times S_1^n$ by

$$f_0(s_0) = (s_0, e_1), \quad f_1(s_1) = (e_0, s_1),$$

for $s_j \in S_j^n$. Choose a generator u for $H^n(S^n)$. We will say that the map m has *type* (p, q) if

$$(m \circ f_0)^* u = p u_0, \quad (m \circ f_1)^* u = q u_1,$$

where $(m \circ f_j)^*$ denotes the cohomology homomorphism induced by $m \circ f_j (j = 0,1)$. Clearly the element u is primitive (with respect to m); and m has type (p, q) if, and only if,

$$m^* u = p \bar{u}_0 \otimes 1 + 1 \otimes q \bar{u}_1 .$$

Now the Mayer-Vietoris coboundary in the exact sequence for the triad (S^{n+1}, C_0, C_1) becomes simply the suspension isomorphism $\sigma : H^r(S^n) \simeq H^{r+1}(S^{n+1})$. Thus σu is a generator for $H^{n+1}(S^{n+1})$. Applying Corollary 1.3 we obtain

$$\sigma u \underset{m}{\curlyvee} \sigma u = (-1)^n p q (\bar{u}_0 * \bar{u}_1),$$

which proves the following classical result, using STEENROD's definition [6; § 17] of the Hopf invariant.

Theorem 2.1. *Let m be a map from $S_0^n \times S_1^n$ to S^n and let $\hat{m} : S^{2n+1} \to S^{n+1}$ be the map obtained from m by the Hopf construction. Suppose that m has type (p, q). Then the Hopf invariant of $\hat{m}$ is $\pm pq$.*

For our second example denote by $E_n (n \geqq 1)$ the $(n+1)$-fold join of a topological group G with itself. Define X_n to be the orbit space of E_n with respect to the action of G on E_n by right translation (for details, see MILNOR [4]). MILNOR shows that E_n is the total space of a principal G-bundle (E_n, G, X_n, p_n), whose projection p_n is simply the identification map $E_n \to X_n$. Since the join construction is associative we may regard E_n as $E_{n-1} * G (n \geqq 1, E_0 = G)$, and hence obtain a triad $(E_n, \overline{E}_{n-1}, \overline{G})$ where $\overline{E}_{n-1} \cap \overline{G} = E_{n-1} \times G$ and where E_{n-1} and G are deformation retracts respectively of $\overline{E}_{n-1}$ and $\overline{G}$.

Now MILNOR [4] shows that X_n is in fact homeomorphic to the cone on E_{n-1} attached to X_{n-1} by the map p_{n-1}. That is, we have a triad (X_n, M_{n-1}, C_{n-1}) $(n \geqq 1)$, where C_{n-1} is the cone on E_{n-1}, M_{n-1} is the mapping cylinder of p_{n-1} and

$$X_n = M_{n-1} \cup C_{n-1}, \quad E_{n-1} = M_{n-1} \cap C_{n-1} .$$

Furthermore, X_{n-1} is a deformation retract of M_{n-1} and p_n is in fact a triad map

$$(E_n, E_{n-1}, \overline{G}) \to (X_n, M_{n-1}, C_{n-1})$$

such that $p_n | E_{n-1} = p_{n-1}$. We set $m_{n-1} = p_n | E_{n-1} \times G : E_{n-1} \times G \to E_{n-1}$. For

example, if $n = 1$ then m_0 is the map from $G \times G$ to G given by

$$m_0(x, y) = xy^{-1} \qquad (x, y \in G).$$

Take cohomology groups with coefficients in some fixed ring R and let $u_1, u_2, \ldots, u_n \in H^*(G)$. Then by iteration of the coboundary Δ we obtain an element $u_1 * \cdots * u_n \in H^*(E_{n-1})$.

Lemma 2.2. *Suppose that $u_1, u_2, \ldots, u_n$ are primitive elements (with respect to the product in G). Then $u_1 * \cdots * u_n$ is primitive with respect to the map m_{n-1}.*

The proof is not difficult but involves some computation. We omit the details.

Since the identity element, e, of G acts as the identity transformation on E_{n-1}, we see that the composition

$$E_{n-1} \xrightarrow{i} E_{n-1} \times G \xrightarrow{m_{n-1}} E_{n-1}$$

is the identity map, where $i(x) = (x, e)$. Thus if $u \in H^*(E_{n-1})$ is primitive with respect to m_{n-1}, its projection on E_{n-1} is simply[3] u.

We will say that an element $x \in H^*(G)$ is *n-transgressive* $(n \geqq 1)$ if it is transgressive with respect to the map p_n — that is, in the usual fibre bundle sense, x is transgressive in the bundle (E_n, X_n, G).

Denote by μ_{n-1} the Mayer-Vietoris coboundary for the triad (X_n, M_{n-1}, C_{n-1}). Thus, $\mu_{n-1} : H^r(E_{n-1}) \to H^{r+1}(X_n)$ $(r \geqq 0)$. Applying Corollary 1.2 and Lemma 2.2 we obtain

Theorem 2.3. *Let $u_1, u_2, \ldots, u_n \in H^*(G)$ be primitive elements $(n \geqq 1)$. Let $x \in H^p(G)$ be an n-transgressive element and let $w \in H^{p+1}(X_n)$ represent its transgression. Then,*

$$p_n^* \mu_{n-1}(u_1 * \cdots * u_n) = 0, \quad p_n^* w = 0, \quad \mu_{n-1}(u_1 * \cdots * u_n) \smile w = 0,$$

and

$$\mu_{n-1}(u_1 * \cdots * u_n) \underset{p_n}{\smile} w \equiv (-1)^q u_1 * \cdots * u_n * x \bmod p_n^* H^{p+q+1}(X_n),$$

where

$$q = (n-1) + \sum_a \dim u_a .$$

Using Corollary 1.4 we show

Theorem 2.4. *Let $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1} \in H^*(G)$ be elements which are $(n+1)$-transgressive $(n \geqq 1)$ and let $w_1, w_2, \ldots, w_{n+1} \in H^*(X_{n+1})$ represent their respective transgressions. Then,*

$$\mu_n(u_1 * \cdots * u_{n+1}) = \pm w_1 \smile w_2 \smile \cdots \smile w_{n+1} .$$

Consider first the case $n = 1$. Then X_1 is homeomorphic to the suspension of G and μ_0 is simply the suspension isomorphism σ. Moreover one may show that[4]

$$k^* w_1 = \mu_0(u_1),$$

---

[3]) For the remainder of this section we make the identifications $H^*(\bar{E}_{n-1}) \approx H^*(E_{n-1})$, $H^*(\bar{G}) \approx H^*(G)$, where the isomorphisms are induced by the canonical deformation retracts.

[4]) The proof is essentially that given by James-Thomas for Equation 1.2, On homotopy-commutativity, Ann. of Math., II. Ser. (1962).

where k^* is induced by the inclusion $X_1 \subset X_2$. By exactness $p_1^* k^* w_1 = 0$ and therefore (see section 1) u_1 is primitive with respect to p_1. On the other hand by naturality u_2 is 1-transgressive and $k^* w_2$ represents its transgression. Since X_2 is homeomorphic to the cone on E_1 attached to X_1 by p_1, we see that Theorem 2.4 (for the case $n = 1$) follows at once from Corollary 1.4 (b). The proof of the Theorem for an arbitrary integer is now a simple matter of induction. We leave the details to the reader.

Recall that the limit of the spaces X_n, X_∞, is a classifying space for G. Rothenberg [5] has used Theorem 2.4 to describe the cohomology ring $H^*(X_n)$, in the case that the coefficient domain is a field and $H^*(G)$ is an exterior algebra. His result, roughly speaking, is that $H^*(X_n)$ is then the direct sum of a truncated polynomial ring with an ideal which has trivial multiplication. In particular he obtains a new proof of Theorem (19.1) of [2], by Borel.

3. A relative product. Let $(X; X_0, X_1)$ and $(Y; Y_0, Y_1)$ be arbitrary proper triads and g a triad map. Take coefficients in some fixed ring R and suppose that

$$y_0 \in H^{p+1}(Y, Y_0) \quad \text{and} \quad y_1 \in H^{q+1}(Y, Y_1)$$

are elements such that $y_0 \smile y_1 = 0$ (in $H^{p+q+2}(Y, Y_0 \cup Y_1)$) and $g_i^* y_i = 0$, for $i = 0$ or 1. We then have a relative functional cup-product

$$y_0 \underset{g}{\smile} y_1 \in H^{p+q+1}(X; X_0 \cup X_1) \bmod L(g, y_0, y_1),$$

where

$$L(g, y_0, y_1) = g^* H^{p+q+1}(Y; Y_0 \cup Y_1) + g_0^* y_0 \smile H^q(X, X_1) + H^p(X, X_0) \smile g_1^* y_1 .$$

Taking $X_0 = X_1 = Y_0 = Y_1 = \varnothing$, the empty set, we obtain the (absolute) functional cup-product described in section 1. Steenrod's original definition of these operations was done in an invariant manner, using the mapping cylinder technique. For our purpose it is more convenient to give cochain definitions, based on the singular cohomology theory. Let $\bar{y}_j$ be a cocycle representation for y_j $(j = 0,1)$. Since $g_i^* y_i = 0$, for $i = 0$ or 1, there is a cochain $a_i \in C^*(X, X_i)$ such that $\delta a_i = g_i^{\#} \bar{y}_i$, where δ denotes the cochain coboundary and $g_i^{\#}$ is the cochain homomorphism determined by g_i. Let $C^*(Y; Y_0, Y_1)$ denote the subgroup of $C^*(Y)$ consisting of those cochains which vanish both on $C_*(Y_0)$ and $C_*(Y_1)$. Since $y_0 \smile y_1 = 0$, there is a cochain $b \in C^{p+q+1}(Y; Y_0, Y_1)$ such that $\delta b = \bar{y}_0 \smile \bar{y}_1$. Define

$$\begin{aligned} w_0 &= g^{\#} b - a_0 \smile g_1^{\#} \bar{y}_1 && (\text{if } i = 0), \\ w_1 &= g^{\#} b + (-1)^p g_0^{\#} \bar{y}_0 \smile a_1 && (\text{if } i = 1), \end{aligned} \tag{3.1}$$

where $p = \dim a_0$. One readily verifies that w_i is a cocycle, and Steenrod shows [6; § 16] that the cohomology class of w_i is a representative for $y_0 \underset{g}{\smile} y_1$. Notice that if $g_0^* y_0 = g_1^* y_1 = 0$, then w_0 and w_1 are cohomologous so that the symmetric notation $y_0 \underset{g}{\smile} y_1$ is well defined.

Suppose now that $(X; X_0, X_1)$ and $(Y; Y_0, Y_1)$ are the proper triads considered in section 1. Thus, $X = X_0 \cup X_1$, $Y = Y_0 \cup Y_1$. Denote by l the inclusion $(X, \varnothing, \varnothing) \subset$

$\subset (X; X_0, X_1)$ and by $l_j (j = 0,1)$ the inclusion $(X, \varnothing) \subset (X, X_j)$. We then have the composite maps $h = g \circ l$, $h_j = g_j \circ l_j$ $(j = 0,1)$:

$$(X, \varnothing; \varnothing) \overset{l}{\subset} (X, X_0, X_1) \xrightarrow{g} (Y; Y_0, Y_1),$$
$$(X, \varnothing) \overset{l_j}{\subset} (X, X_j) \xrightarrow{g_j} (Y, Y_j).$$

Suppose that $z_0 \in H^{p+1}(Y, Y_0)$ and $z_1 \in H^{q+1}(Y, Y_1)$ are elements such that $h_i^* z_i = 0$ for $i = 0$ or 1. Since $Y_0 \cup Y_1 = Y$ we have $z_0 \smile z_1 = 0$, and therefore the functional cup-product

$$z_0 \underset{h}{\smile} z_1 \in H^{p+q+1}(X) \bmod L(h, z_0, z_1)$$

is defined. Let $\bar{z}_j$ be a cocycle representing z_j $(j = 0,1)$. Since $h_i^* z_i = 0$ for $i = 0$ or 1, there is a cochain $c_i \in C^*(X)$ such that $\delta c_i = h_i^{\#} \bar{z}_i$. Since $z_0 \smile z_1 = 0$ there is a cochain $b \in C^{p+q+1}(Y; Y_0, Y_1)$ such that $\delta b = \bar{z}_0 \smile \bar{z}_1$. Now b may be regarded as a cochain in $C^*(Y, Y_j)$ for $j = 0,1$. Furthermore, the cup-product of the absolute cochain c_i with the relative cochain $g_{1-i}^{\#} \bar{z}_{1-i}$ is again a relative cochain — in fact an element of $C^{p+q+1}(X, X_{1-i})$. Thus if we define

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} v_1 &= g_1^{\#} b - c_0 \smile g_1^{\#} \bar{z}_1 && (\text{if } i = 0), \\ v_0 &= g_0^{\#} b + (-1)^p g_0^{\#} \bar{z}_0 \smile c_1 && (\text{if } i = 1), \end{aligned}$$

we obtain a cochain $v_{1-i} \in C^{p+q+1}(X, X_{1-i})$ $(i = 0$ or $1)$. Since $h_j^{\#} = g_j^{\#} \circ l_j^{\#}$ $(j = 0,1)$ it is clear that $l_{1-i}^{\#} v_{1-i}$ is a cocycle which represents $z_0 \underset{h}{\smile} z_1$. Thus

$$0 = \delta\, l_{1-i}^{\#} v_{1-i} = l_{1-i}^{\#} \delta v_{1-i}.$$

But $l_{1-i}^{\#}$ is a monomorphism, since $C^*(X, X_{1-i})$ is simply a subgroup of $C^*(X)$. Therefore, v_{1-i} is a cocycle. We define

$$(3.3) \qquad z_0 \underset{g}{\circ} z_1 = \{v_{1-i}\} \in H^{p+q+1}(X, X_{1-i}) \bmod \hat{L}(g, z_0, z_1),$$

where $\hat{L}(g, z_0, z_1)$ denotes the subgroup $H^*(X) \smile g_1^* z_1$, if $i = 0$, and the subgroup $g_0^* z_0 \smile H^*(X)$ if $i = 1$. Thus we have proved

Lemma 3.4. *Let $z_0 \in H^{p+1}(Y, Y_0)$, $z_1 \in H^{q+1}(Y, Y_1)$ be elements such that $h_i^* z_i = 0$ for $i = 0$ or 1. Then there is a cohomology class*

$$z_0 \underset{g}{\circ} z_1 \in H^{p+q+1}(X, X_{1-i}) \bmod \hat{L}(g, z_0, z_1)$$

such that

$$l_{1-i}^*(z_0 \underset{g}{\circ} z_1) \equiv z_0 \underset{h}{\smile} z_1 \in H^{p+q+1}(X) \bmod L(h, z_0, z_1).$$

By the naturality of the functional cup-product we obtain

Corollary 3.5.

$$l_{1-i}^*(z_0 \underset{g}{\circ} z_1) \equiv n_0^* z_0 \underset{g}{\smile} n_1^* z_1 \in H^{p+q+1}(X) \bmod L(g, n_0^* z_0, n_1^* z_1),$$

where n_j^* is induced by the inclusion $Y \subset (Y, Y_j)$ $(j = 0,1)$.

Let $x_i \in H^p(X_i)$ ($i = 0$ or 1) be a transgressive element and choose $z_i \in H^{p+1}(Y, Y_i)$ such that $g_i^* z_i = \delta_i x_i \in H^{p+1}(X, X_i)$. Let z_{1-i} be an arbitrary element in $H^{q+1}(Y, Y_{1-i})$. Then $z_0 \smile z_1 = 0$, since $Y_0 \cup Y_1 = Y$. Furthermore, $h_i^* z_i = 0$, by naturality. Thus we can define the class $z_0 \underset{g}{\circ} z_1 \in H^{p+q+1}(X, X_{1-i}) \bmod \hat{L}(g, z_0, z_1)$. We show

Lemma 3.6.

$$k_1^*(z_0 \underset{g}{\circ} z_1) \equiv -(x_0 \smile k_1^* g_1^* z_1^*) \bmod m_0^* H^p(X) \smile k_1^* g_1^* z_1 \qquad (if\ i = 0),$$

$$k_0^*(z_0 \underset{g}{\circ} z_1) = (-1)^p (k_0^* g_0^* z_0 \smile x_1) \bmod k_0^* g_0^* z_0 \smile m_1^* H^q(X) \quad (if\ i = 1).$$

Here k_j^* is induced by the inclusion $(X_{1-j}, A) \subset (X, X_j)$ and m_j^* by the inclusion $X_j \subset X$ ($j = 0,1$). Consider first the case $i = 0$. Let $x_0 \in Z^p(X_0)$ be a cocycle representative for x_0. Extend x_0 to a cochain $\hat{x}_0$ defind on all of X; $\hat{x}_0 \in C^p(X)$. Then $\delta \hat{x}_0$ is a cocycle representing $\delta_0 x_0$. Since $g_0^* z_0 = \delta_0 x_0$, there is a cochain $e_0 \in C^p(X, X_0)$ such that

$$g_0^{\#} \bar{z}_0 - \delta \hat{x}_0 = \delta e_0,$$

where $\bar{z}_j$ is a cocycle representing z_j ($j = 0,1$). Thus $\hat{x}_0 + e_0$ is a cochain in $C^p(X)$ such that $\delta(x_0 + e_0) = h_0^{\#} \bar{z}_0$. Choose $b \in C^{p+q+1}(Y; Y_0; Y_1)$ such that $\delta b = \bar{z}_0 \smile \bar{z}_1$. Then by (3.2), we can define a representative cocycle for $z_0 \underset{g}{\circ} z_1$ by

$$v_1 = g_1^{\#} b - (\hat{x}_0 + e_0) \smile g_1^{\#} \bar{z}_1.$$

Denote by $k_1^{\#}$ the cochain map induced by k_1. Then,

$$k_1^{\#} g_1^{\#} b = 0 = k_1^{\#}(e_0 \smile g_1^{\#} \bar{z}_1),$$

since $g_1^{\#} b$ and $e_0 \smile g_1^{\#} \bar{z}_1$ vanish on $C_*(X_0)$. Furthermore

$$k_1^{\#}(\hat{x}_0 \smile g_1^{\#} \bar{z}_1) = (m_0^{\#} \hat{x}_0 \smile k_1^{\#} g_1^{\#} \bar{z}_1) = (\bar{x}_0 \smile k_1^{\#} g_1^{\#} \bar{z}_1),$$

since $\hat{x}_0$ was defined to be the extension of $\bar{x}_0$ to all of X. Therefore,

$$k_1^{\#} v_1 = -(\bar{x}_0 \smile k_1^{\#} g_1^{\#} \bar{z}_1),$$

and passing to cohomology classes we obtain

$$k_1^* \{v_1\} = -(x_0 \smile k_1^* g_1^* z_1),$$

as was asserted. The indeterminancy arises from the equation $k_1^*(H^p(X) \smile g_1^* z_1) = m_0^* H^p(X) \smile k_1^* g_1^* z_1$, by the naturality of the cup-product.

The proof for the case $i = 1$ is just the same and is left to the reader.

4. Proof of Theorem 1.1. We continue with the notation of section 1; that is, with proper triads $(X; X_0, X_1)$, $(Y; Y_0, Y_1)$, a triad map g, and

$$A = X_0 \cap X_1, \quad B = Y_0 \cap Y_1, \quad f = g | A.$$

Consider the following sequence of homomorphisms ($j = 0,1$):

$$H^r(A) \xrightarrow{\bar{\delta}_j} H^{r+1}(X_{1-j}, A) \xleftarrow{k_j^*} H^{r+1}(X, X_j) \xrightarrow{l^*} H^{r+1}(X). \tag{4.1}$$

Here $\bar{\delta}_j$ is the coboundary and k_j^*, l_j^* are induced by inclusions. Since $(X; X_0, X_1)$ is a *proper* triad, k_j^* is an isomorphism for all $r \geqq 0$ and $j = 0,1$. Define λ_j $(j = 0,1)$ to be the composition $k_j^{*-1} \circ \bar{\delta}_j$. Thus, $\lambda_j : H^r(A) \to H^{r+1}(X, X_j)$. Then the composition $\Delta_j = l_j^* \circ \lambda_j$ is simply a Mayer-Vietoris coboundary [3], with $\Delta_0 + \Delta_1 = 0$. The operator Δ, used in sections 1 and 2, we define to be Δ_1.

Now let ν_j be the counterpart, for the triad $(Y; Y_0, Y_1)$, of the map λ_j. Since g is a triad map we obtain a commutative diagram $(j = 0,1)$:

$$\begin{array}{ccc} H^r(A) & \xrightarrow{\lambda_j} & H^{r+1}(X, X_j) \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g^*} \\ H^r(B) & \xrightarrow[\nu]{} & H^{r+1}(Y; Y_j)\,. \end{array} \tag{4.2}$$

We use this to show

Theorem 4.3. *Let $x_i \in H^p(X_i)$ $(i = 0$ or $1)$ be a transgressive element and choose $z_i \in H^{p+1}(Y, Y_i)$ such that $g_i^* z_i = \delta_i x_i$. Let $v \in H^q(B)$ be an element such that*

$$f^* v = \sum_a \pi_0^* v_a \smile \pi_1^* v_a',$$

where $v_a \in H^*(X_0)$, $v_a' \in H^*(X_1)$ and π_j^* is induced by the inclusion $A \subset X_j$ $(j = 0,1)$. Then

$$h_i^* z_i = 0\,, \quad z_i \smile \nu_{1-i} v = 0\,,$$

and

$$z_0 \underset{g}{\circ} \nu_1 v \equiv (-1)^{p+1} \sum_a \lambda_1 (\pi_0^* (x_0 \smile v_a) \smile \pi_1^* v_a') \bmod \hat{L}(g, z_0, \nu_1 v) \qquad (\textit{if } i = 0),$$

$$\nu_0 v \underset{g}{\circ} z_1 \equiv (-1)^q \sum_a \lambda_0 (\pi_0^* v_a \smile \pi_1^* (v_a' \smile x_1)) \bmod \hat{L}(g, \nu_0 v, z_1) \qquad (\textit{if } i = 1).$$

Again we do only the case $i = 0$. By Lemma 3.6 and 4.2 and the definition of λ_1 we have

$$\begin{aligned} k_1^* (z_0 \underset{g}{\circ} \nu_1 v) &\equiv -(x_0 \smile k_1^* g_1^* \nu_1 v) \equiv -(x_0 \smile k_1^* \lambda_1 f^* v) \equiv \\ &\equiv -(x_0 \smile \bar{\delta}_1 f^* v) \bmod m_0^* H^p(X) \smile k_1^* g_1^* z_1\,. \end{aligned}$$

By (3.3) of [6],

$$x_0 \smile (\bar{\delta}_1 f^* v) = (-1)^p \bar{\delta}_1 (\pi_0^* x_0 \smile f^* v)\,.$$

Therefore,

$$k_1^* (z_0 \underset{g}{\circ} \nu_1 v) \equiv (-1)^{p+1} \sum_a \bar{\delta}_1 (\pi_0^* (x_0 \smile v_a) \smile \pi_1^* v_a')\,.$$

Applying k_1^{*-1} to both sides of this and recalling that $\lambda_1 = k_1^{*-1} \circ \bar{\delta}_1$, we obtain the desired result. The proof for the case $i = 1$ is entirely similar, except that we now use (3.2) of [6].

To prove Theorem 1.1 define $w_i = n_i^* z$. Then w_i is a representative for the transgression of x_i. Furthermore, $n_i^* \nu_i v = \Delta_i v$. Thus, by Corollary 3.5 we obtain

$$l_1^* (z_0 \underset{g}{\circ} \nu_1 v) \equiv w_0 \underset{g}{\smile} \Delta_1 v \qquad (\text{if } i = 0)\,,$$

$$l_0^* (\nu_0 v \underset{g}{\circ} z_1) \equiv \Delta_0 v \underset{g}{\smile} w_1 \qquad (\text{if } i = 1)\,.$$

Applying l_{1-i}^* to both sides of (4.3) we then obtain the desired result.

5. Appendix. Both the examples given in section 2 may be subsumed under a more general construction. Let E, F, B and X be topological spaces and m and p be maps as below:

$$E \times F \xrightarrow{m} B \xrightarrow{p} X .$$

We will say that p is *stable* with respect to m, if, for all $e \in E$,

$$p(m(e, f_1)) = p(m(e, f_2)) \qquad (f_1, f_2 \in F) .$$

We consider the join triad $(E * F, \overline{E}, \overline{F})$ and the triad (X_1, M_p, CB) where X_1 is the cone on B attached to X by p, CB is the cone on B and M_p is the mapping cylinder of p (see § 2 of [1]). One has

$$X_1 = M_p \cup CB, \quad B = M_p \cap CB .$$

If p is stable, then m extends to a triad map

$$\hat{m} : (E * F, \overline{E}, \overline{F}) \to (X_1, M_p, CB) .$$

In particular if X is a point, then X_1 is the suspension of B and $\hat{m}$ is the map obtained from m by the Hopf construction. This was the case in our first example in section 2, with $E = S_0^n$, $F = S_1^n$, and $B = S^n$. In the second example $E = B = E_{n-1}$, $F = G$, $X = X_{n-1}$, $X_1 = X_n$, $m = m_{n-1}$, $p = p_{n-1}$, and $\hat{m} = p_n$. It is clear that the results of section 1 may be applied to the cohomology groups of the spaces in this more general construction. In a forthcoming note with W. BROWDER Corollary 1.4 is applied to compute the mod 2 cohomology ring for the "projective plane" associated with an H-space.

Bibliography

[1] J. ADEM, Un criterio cohomologico para determina y composiciones esenciales de transformaciones. Bol. Mat. Mex. **1**, 38–48 (1956).
[2] A. BOREL, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts. Ann. of Math., II. Ser. **57**, 115–206 (1953).
[3] S. EILENBERG and N. STEENROD, Foundations of algebraic topology. Princeton 1952.
[4] J. MILNOR, Construction of universal bundles. Ann. of Math., II. Ser. **63**, 430–436 (1956).
[5] M. ROTHENBERG, Thesis, Univ. of Calif. (Berkeley) 1961.
[6] N. STEENROD, Cohomology invariants of mappings. Ann. of Math., II. Ser. **50**, 954–988 (1949).

Eingegangen am 28. 8. 1961

Anschrift des Autors:
Emery Thomas
Department of Mathematics
University of California
Berkeley (Cal.), USA

Über das cap- und slant-Produkt spektraler Sequenzen I

Von

Rolf Kultze *)

1. Mit Hilfe der komplexen Vektorraumbündel über endlichen CW-Komplexen haben Atiyah und Hirzebruch [1] eine periodische Cohomologietheorie ohne Dimensionsaxiom (K^*-Theorie) konstruiert, die via Chern-Charakter und eine spektrale Sequenz E_r^* in enger Beziehung zur singulären Cohomologietheorie steht. Unter Benutzung der Spanier-Whiteheadschen S-Dualität von endlichen CW-Komplexen [6] kann man eine zur K^*-Theorie duale Homologietheorie ohne Dimensionsaxiom (K_*-Theorie) erklären, der eine spektrale Sequenz E_*^r zugeordnet wird. Die beiden Terme E_2^* und E_*^2 besitzen die folgende Eigenschaft:

$$E_2^*(X) \cong \tilde{H}^*(X, Z); \quad E_*^2(X) \cong \tilde{H}_*(X, Z).$$

Das Hauptresultat dieser Note besagt, daß cap- und slant-Produkt jeweils ein Produkt der spektralen Sequenzen E_r^* und E_*^r induzieren. Die vorliegende Arbeit enthält keine Beweise. Eine ausführlichere Darstellung soll an anderer Stelle erscheinen.

2. Im folgenden betrachten wir stets topologische Räume mit *Basispunkt*. Ist X ein CW-Komplex [8], so sei der Basispunkt stets eine O-Zelle. Unter einer Abbildung $f: X \to Y$ zweier topologischer Räume verstehen wir eine stetige Abbildung mit $f(x_0) = y_0$, wenn x_0 und y_0 die Basispunkte von X und Y bezeichnen. Ist $H(x, t)$ eine Homotopie der beiden Abbildungen $f_0, f_1: X \to Y$, so gelte stets $H(x_0, t) = y_0$. $[X, Y]$ sei die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von X in Y. $[f]$ bezeichne die Homotopieklasse von $f: X \to Y$. Ist $A \subset X$ ein Teilraum von X mit $a_0 = x_0 \in A$, so sei X/A der Raum, der aus X entsteht, wenn alle Punkte von A miteinander identifiziert werden. X/A trage stets die Identifikationstopologie. $X^+ = X/\varnothing$ sei die topologische Summe von X und einem Punkt, den man als Basispunkt auswählt.

Unter der *Einhängung* SX des topologischen Raumes X versteht man den Raum

$$SX = X \times I / X \times 0 \cup X \times 1 \cup x_0 \times I.$$

Ist $f: X \to Y$, so ist die Einhängung $Sf: SX \to SY$ definiert durch $Sf(x, s) = (f(x), s)$. Die Einhängungen homotoper Abbildungen sind wieder homotop. Für

*) Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Dr. Atiyah und Herrn Prof. Hirzebruch für ihre Ratschläge und Hinweise zu danken. Mein Dank gilt ferner der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die mir die Durchführung dieser Arbeit ermöglicht hat.

$n > 1$ definiert man induktiv $S^n X = S(S^{n-1} X)$. Daher hat man eine Folge von Abbildungen

$$[X, Y] \xrightarrow{S} [SX, SY] \xrightarrow{S} [S^2 X, S^2 Y] \xrightarrow{S} \cdots.$$

Für $n \geqq 2$ bildet die Homotopiemenge $[S^n X, S^n Y]$ eine abelsche Gruppe, die Addition ist durch die „track-addition" [2] definiert. Außerdem sind die Abbildungen $S: [S^n X, S^n Y] \to [S^{n+1} X, S^{n+1} Y]$ für $n \geqq 2$ Homomorphismen. Dann sei

$$\{X, Y\} = \lim_{\to} [S^n X, S^n Y].$$

Die Elemente von $\{X, Y\}$ heißen *S-Abbildungen*. Ferner hat man eine bilineare Abbildung

$$\{Y, Z\} \otimes \{X, Y\} \to \{X, Z\}.$$

Die Kategorie, deren Objekte topologische Räume und deren Abbildungen S-Abbildungen sind, heißt *S-Kategorie*.

Sind X und Y topologische Räume, so sei $X \vee Y$ der Teilraum $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$ des topologischen Produkts $X \times Y$. Ferner definieren wir $X \# Y = X \times Y / X \vee Y$. Offensichtlich hat man $SX = X \# S^1$.

Das slant-Produkt ist von verschiedenen Autoren untersucht worden (vgl. z. B. [5]). Man kann es auffassen als eine Operation

$$\tilde{H}^n(X \# Y) \otimes \tilde{H}_q(X) \to \tilde{H}^{n-q}(Y).$$

Ist $a \in \tilde{H}^n(X \# Y)$ und $b \in \tilde{H}_q(X)$, so bezeichnen wir mit a/b das slant-Produkt von a und b.

3. Nach SPANIER-WHITEHEAD [6] kann man jedem endlichen CW-Komplex X einen dualen CW-Komplex X' zuordnen. u sei eine stetige Abbildung $u: X' \# X \to \to S^n$ und $s^n \in H^n(S^n)$ repräsentiere die Orientierung von S^n. Dann definiert die Abbildung

$$\psi_u(b) = u^*(s^n)/b \qquad (b \in \tilde{H}_q(X'))$$

einen Homomorphismus $\psi_u: \tilde{H}_q(X') \to \tilde{H}^{n-q}(X)$. Ist ψ_u ein Isomorphismus, so heißt X' *n-Dual* von X und $u: X' \# X \to S^n$ eine *Dualitätsabbildung*. Man kann zeigen, daß jeder endliche CW-Komplex für genügend großes n einen n-Dual besitzt. In [6] wird die S-Dualität nur für zusammenhängende CW-Komplexe behandelt. Auf die Zusammenhangsbedingung kann jedoch verzichtet werden.

Sind X, X', Y, Y' endliche CW-Komplexe und $u: X' \# X \to S^n$, $v: Y' \# Y \to S^n$ Dualitätsabbildungen, so existiert nach [6] Theorem 5.9 ein Isomorphismus

$$D_n(u, v): \{X, Y\} \xrightarrow[\cong]{} \{Y', X'\}.$$

4. $\mathfrak{B}$ bezeichne die Kategorie der endlichen CW-Komplexe und Zellenabbildungen. ATIYAH-HIRZEBRUCH [1] haben auf $\mathfrak{B}$ eine Cohomologietheorie ohne Dimensionsaxiom wie folgt konstruiert: Ist $X \in \mathfrak{B}$, so sei $G(X)$ die freie abelsche Gruppe, die durch die Isomorphieklassen $[\xi]$ von komplexen Vektorraumbündeln ξ über X erzeugt wird. $Q(X)$ sei diejenige Untergruppe von $G(X)$, die durch die Elemente $[\xi] - [\xi_1] - - [\xi_2]$ $(\xi \cong \xi_1 \oplus \xi_2)$ erzeugt wird. Dann sei $K(X) = G(X)/Q(X)$. Als induzierte Ab-

bildungen $f^! : K(Y) \to K(X)$ $(f : X \to Y)$ wählt man die natürlichen Ringhomomorphismen, die durch das Liften von Bündeln gegeben sind. Die Einbettung $i_0 : x_0 \to X$ induziert einen Ringhomomorphismus $i^! : K(X) \to K(x_0)$. Wir setzen $\tilde{K}(X) = (i^!)^{-1}(0)$. Weiter definiert man für alle $q \geqq 0$ die Gruppen

$$K^{-q}(X, A) = \tilde{K}(S^q(X/A)) \qquad (A, X \in \mathfrak{B}).$$

Unter Verwendung von Resultaten von Puppe [4] kann man für die Gruppen $K^{-q}(X, A)$ in den negativen Dimensionen eine exakte Cohomologiesequenz angeben. Ferner ergibt sich aus Resultaten von Bott über Periodizitätseigenschaften von $Z \times B_U$ (B_U der klassifizierende Raum der unendlichen unitären Gruppe U) die Existenz eines Isomorphismus

$$\beta : K^{-q}(X, A) \to K^{-q-2}(X, A),$$

der mit stetigen Abbildungen und dem Corandoperator δ der oben erwähnten Cohomologiesequenz vertauschbar ist. Daher kann man definieren: $K^q(X, A) = K^0(X, A)$ (q gerade) und $K^q(X, A) = K^{-1}(X, A)$ (q ungerade) $(q = 0, \pm 1, \ldots)$ und erhält auf diese Weise für *alle* q eine Cohomologietheorie ohne Dimensionsaxiom mit der Periode 2.

Zu jedem endlichen CW-Komplex X wählen wir nun einen *festen* n-Dual X' und eine feste Dualitätsabbildung $u : X' \# X \to S^n$ (n hängt dabei noch von X ab) und definieren nach einem Vorschlag von Atiyah

$$\tilde{K}_q(X) = \tilde{K}^{n-q}(X'); \;\; K_q(X, A) = \tilde{K}_q(X/A) \qquad (A, X, X' \in \mathfrak{B}).$$

Wie man leicht zeigt, ist $\tilde{K}_q(X)$ bis auf Isomorphie von der Wahl von $u : X' \# X \to S^n$ unabhängig. Ist $f : X \to Y$ eine Zellenabbildung von X in Y, so erklären wir die induzierte Abbildung $f_! : \tilde{K}_q(X) \to \tilde{K}_q(Y)$ in folgender Weise: $u : X' \# X \to S^n$, $v : Y' \# Y \to S^n$ seien zwei Dualitätsabbildungen und $\alpha = D_n(u, v)\{f\}$. Dann wird $f_!$ so definiert, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_q(X) & \xrightarrow{f_!} & \tilde{K}_q(Y) \\ \downarrow\wr\!\wr & & \downarrow\wr\!\wr \\ \tilde{K}^{n-q}(X') & \xrightarrow[\alpha^!]{} & \tilde{K}^{n-q}(Y') \end{array}$$

kommutativ ist. $f_!$ ist von der Wahl von u und v unabhängig. Mit Hilfe des Abbildungskegels C_i der Injektion $i : A \subset X$ kann man in bekannter Weise den Randoperator

$$\partial : K_q(X, A) \to K_{q-1}(A)$$

erklären. Das System der drei Funktionen $K_q(X, A)$, $f_!$ und ∂ erfüllt die Axiome 1—6 von Eilenberg-Steenrod [3] für eine Homologietheorie.

5. Atiyah-Hirzebruch beweisen in [1] § 2 die Existenz einer spektralen Sequenz $E_r^*(X)$ mit den folgenden Eigenschaften: Ist $X \in \mathfrak{B}$, so gilt

$$E_1^p(X) \simeq C^p(X, Z), E_2^p(X) \simeq H^p(X, Z),$$

und d_1 ist der gewöhnliche Corandoperator. Analog zeigt man unter Benutzung der Gruppen $K_q(X, A)$: Es sei $X \in \mathfrak{B}$ und $K_*^p(X) = \text{Bild}\{K_*(X^p) \to K_*(X)\}$. Dann existiert eine spektrale Sequenz $E_*^r(X)$ mit den Eigenschaften:

$$E_p^1(X) \simeq H_p(X^p, X^{p-1}, Z),\; E_p^2(X) \simeq H_p(X, Z),\; E_p^\infty(X) \simeq K_*^p(X)/K_*^{p-1}(X), \quad d^r = 0$$

für gerades r. Ist $H_q(X, Z) = 0$ für ungerade q oder ist $H_*(X, Z)$ frei abelsch, so ist die spektrale Sequenz $E_*^r(X)$ trivial.

Als Vorbereitung für einen Dualitätssatz für spektrale Sequenzen benötigen wir einige Begriffe aus der Theorie der CW-Verbände [6] § 7, [7]. Ist $X \in \mathfrak{B}$, so heißt ein Verband $\mathfrak{A}$ von Unterkomplexen von X *CW-Verband*, wenn alle Elemente von $\mathfrak{A}$ den Basispunkt $x_0 \in X$ enthalten und wenn gilt $x_0, X \in \mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}'$ sei ein CW-Verband auf X' und $\mathfrak{a}: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein Antiisomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$. Ferner setzen wir

$$H(\mathfrak{a}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a} A \# A .$$

Dann induziert

$$u: X' \# X/H(\mathfrak{a}) \to S^n ,$$

wie man leicht sieht, eine Abbildung

$$u_{A_1, A_2}: \mathfrak{a} A_1/\mathfrak{a} A_2 \# A_2/A_1 \to S^n \qquad (A_1 \subset A_2, A_1, A_2 \in \mathfrak{A}).$$

$(u, \mathfrak{a})$ heißt Dualitätsabbildung, wenn u_{A_1, A_2} für jedes Paar $A_1 \subset A_2$ eine Dualitätsabbildung im üblichen Sinne ist (vgl. Abschnitt 3). Mit $\mathfrak{A}(X, x_0)$ bezeichnen wir den CW-Verband, der aus allen Unterkomplexen $A \ni x_0$ von X besteht. X^* heißt *kombinatorischer n-Dual* von X, wenn die Verbände $\mathfrak{A}(X, x_0)$ und $\mathfrak{A}(X^*, x_0^*)$ im obigen Sinne n-dual sind. Jeder endliche CW-Komplex besitzt für genügend großes n einen kombinatorischen n-Dual.

Durch eine geringfügige Modifikation der spektralen Sequenzen E_r^* und E_*^r kann man erreichen, daß die Terme für $r = 2$ zu den *reduzierten* Cohomologie- bzw. Homologiegruppen isomorph sind. Diese „reduzierten" spektralen Sequenzen, mit denen wir es im folgenden ausschließlich zu tun haben, bezeichnen wir wieder mit E_r^* und E_*^r.

Satz 1. *Ist X^* kombinatorischer n-Dual von X, so existiert ein Isomorphismus*

$$\omega_r: E_p^r(X) \to E_r^{n-p}(X^*),$$

so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_p^r(X) & \xrightarrow{f_!} & E_p^r(Y) \\ \omega_r \downarrow & & \downarrow \omega_r \\ E_r^{n-p}(X^*) & \xrightarrow[D_n(u,v)\{f\}^!]{} & E_r^{n-p}(Y^*) \end{array}$$

für jede Zellenabbildung $f: X \to Y$ kommutativ ist.

Unter Verwendung von Satz 1 und [1] 2.3 kann man nun die Homologieoperation d_*^3 näher charakterisieren. Dazu sei

$$\widehat{Sq}^2: H_p(X, Z_2) \to H_{p-2}(X, Z_2)$$

die Transponierte von Sq^2, ∂_* der Bocksteinhomomorphismus

$$\partial_* : H_p(X, Z_2) \to H_{p-1}(X, Z)$$

und ζ der Koeffizientenhomomorphismus

$$\zeta : H_p(X, Z) \to H_p(X, Z_2)\,.$$

Dann gilt

Satz 2. *d_*^3 ist die stabile Homologieoperation*

$$d_*^3 = \partial_* \circ \widehat{Sq}^2 \circ \zeta\,.$$

6. Durch Benutzung des Bott-Isomorphismus $\beta : K^{-q}(X, A) \to K^{-q-2}(X, A)$ (vgl. Abschnitt 4) ist es möglich, ein Produkt

$$\cap_r : E_r^p(X) \otimes E_q^r(X) \to E_{q-p}^r(X)$$

zu erklären, das u. a. durch das Tensorprodukt von Vektorraumbündeln definiert wird. $\cap_{r+1}$ wird durch $\cap_r$ induziert. Durch Ausnutzung der Eigenschaften kombinatorischer Duale läßt sich zeigen, daß $\cap_2$ gerade mit dem reduzierten cap-Produkt übereinstimmt. Daher ergibt sich

Satz 3. *Das reduzierte cap-Produkt definiert für alle $r \geqq 2$ ein Produkt*

$$E_r^p(X) \otimes E_q^r(X) \to E_{q-p}^r(X)\,.$$

Ähnlich beweist man:

Satz 4. *Das slant-Produkt definiert für alle $r \geqq 2$ ein Produkt*

$$E_r^p(X \# Y) \otimes E_q^r(X) \to E_r^{p-q}(Y)\,.$$

Literaturverzeichnis

[1] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. Symposia in Pure Mathematics **3** (Differential Geometry), 7—83 (1960).
[2] M. G. Barratt, Track groups I. Proc. London Math. Soc., III. Ser. **5**, 71—106 (1955).
[3] S. Eilenberg and N. E. Steenrod, Foundations of algebraic topology. Princeton Univ. Press 1952.
[4] D. Puppe, Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. Math. Z. **69**, 299—344 (1958).
[5] E. Spanier, Infinite symmetric products, function spaces, and duality. Ann. of Math., II. Ser. **69**, 142—198 (1959).
[6] E. Spanier, Function spaces and duality. Ann. of Math., II. Ser. **70**, 338—378 (1959).
[7] E. Spanier and J. H. C. Whitehead, Duality in relative homotopy theory. Ann. of Math., II. Ser. **67**, 203—238 (1958).
[8] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949).

Eingegangen am 30. 11. 1961

Anschrift des Autors:
Rolf Kultze
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Heidelberg
Heidelberg, Tiergartenstraße

Axiomatische Charakterisierung der singulären Homologietheorie

Von

Friedrich-Wilhelm Bauer

In dieser Arbeit beweisen wir einen sehr allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, der insbesondere zu einer Charakterisierung der singulären Homologietheorie führt.

Unter einer Kategorie K verstehen wir im folgenden eine Kategorie (im Sinne von [1]) von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen, für die zusätzlich gilt:

K 1) Ist $f: X \to Y$, $f \in K$, so ist auch der Abbildungszylinder von f aus K.

K 2) Sind $X_1, X_2 \in K$ und ist $X = X_1 \cup X_2$ die topologische Summe von X_1 und X_2, so ist auch $X \in K$. Umgekehrt gehört mit X auch jede Komponente von X zu K. Ist $X \in K$ und $x \in X$, so ist auch $x \in K$.

K 3) Sind $X, Y_1, Y_2 \in K$, $Y_1, Y_2 \subset X$, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$ und gibt es in K eine Äquivalenz $h: Y_1 \to Y_2$, so ist auch $X/h \in K$. Unter X/h verstehen wir den Raum X, nachdem man jedes $y_1 \in Y_1$ mit $hy_1 \in Y_2$ identifiziert hat.

K 4) Ist $f_i: X_i \to Z$, $i = 1, 2$, $f_i \in K$, so ist das von f_1, f_2 eindeutig bestimmte f: $X_1 \cup X_2 \to Z$ auch aus K. Ist in K 3) $f: X \to Z$ eine derartige Abbildung, die auf $Y_1 \cup Y_2$ mit h verträglich ist, so ist auch die (eindeutig bestimmte) Abbildung $f': X/h \to Z$, die durch f definiert ist, aus K.

Beispiel. Die geradlinigen, endlich-dimensionalen kompakten Polyeder in einem unendlich-dimensionalen linearen Raum bilden eine Kategorie, wenn man als Abbildungen simpliziale Abbildungen (bezüglich irgend einer geradlinigen Triangulation) nimmt.

Unter einer absoluten Homologietheorie $\mathfrak{B}$ auf K verstehen wir eine Menge von Funktoren $\{H_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) von K in die Kategorie der G-Moduln (für festes abelsches G), so daß gilt:

$\mathfrak{B}$ 1) Sind $f, g \in K$, $f \sim g$ (d. h. „f ist homotop zu g"), so ist

$$H_n(f) = H_n(g)$$

(im folgenden werden wir einfach $H_n(f) = f_{*\mathfrak{B}}$ schreiben, was der üblichen Terminologie entspricht).

$\mathfrak{B}$ 2) Ist $x \in K$ ein Punkt, so ist

$$H_n(x) = 0, \qquad n > 0.$$

$\mathfrak{B}$ 3) Sind $X_1, X_2 \in K$, so liefern die Inklusionen $i_j: X_j \to X_1 \cup X_2$ $(j = 1, 2)$ eine direkte Zerlegung:

$$H_n(X) = H_n(X_1) + H_n(X_2)$$

für alle n, wobei $X_1 \cup X_2$ die topologische Summe ist.

Wichtig für das folgende ist noch die Definition eines Homomorphismus

$$\varphi: \mathfrak{B} \to \mathfrak{W}$$

für zwei Homologietheorien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{W}$.

Ein solcher Homomorphismus ist eine Menge

$$\varphi = \{\varphi(n, X)\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad X \in K,$$

von homomorphen Abbildungen (d. h. von G-Homomorphismen), für welche gilt:

H 1) Es ist

$$\varphi: H_n^{\mathfrak{B}}(X) \to H_n^{\mathfrak{W}}(X).$$

H 2) Sei $f: X \to Y$, $f \in K$, so ist

$$\varphi f_{*\mathfrak{B}} = f_{*\mathfrak{W}} \varphi.$$

Seien L und K zwei Kategorien; es soll $L \Subset K$ heißen, wenn:

(1) $L \subset K$,

(2) zu jedem $f: X \to Y$, $X, Y \in L$, $f \in K$, ein zu f homotopes $g: X \to Y$, $g \in L$, existiert.

Offenbar ist diese Bedingung eine Art verallgemeinerter „simplizialer Approximation". Ist z. B. L die Kategorie der Polyeder und K die Kategorie aller topologischen Räume, so ist $L \Subset K$.

Sei $\mathfrak{P}$ eine Homologietheorie auf L. Von einer Homologietheorie $\mathfrak{B}$ auf K sagen wir, sie sei „extremal bezüglich $\mathfrak{P}$", wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind:

M 1) Es ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}$ auf L.

M 2) Zu jedem $\zeta \in H_n^{\mathfrak{B}}(X)$, $X \in K$, gibt es ein $\eta \in H_n(Y)$, $Y \in L$, sowie eine stetige Abbildung $f \in K$, $f: Y \to X$, so daß

$$f_{*\mathfrak{B}} \eta = \zeta$$

ist.

M 3) Ist $\mathfrak{W}$ eine andere, M 1), M 2) erfüllende Homologietheorie, so gibt es einen Homomorphismus[1])

$$\varphi: \mathfrak{B} \to \mathfrak{W}.$$

Für die Formulierung unseres Eindeutigkeitssatzes empfiehlt es sich, folgende Verabredung zu treffen:

Wir identifizieren zwei Homologietheorien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$, die beide M 1) und M 2) erfüllen, wenn es zwischen ihnen genau einen Isomorphismus gibt

$$\varphi: \mathfrak{B} \to \mathfrak{W}.$$

---

[1]) Wir setzen von allen Homomorphismen voraus, daß sie auf $\mathfrak{P}$ die Identität sind.

Das soll also ausführlicher heißen: Sind $\varphi, \psi : \mathfrak{W} \to \mathfrak{W}$ zwei Isomorphismen, so ist

$$\varphi = \psi.$$

Gerade diese Situation wird nämlich für unsere Homologietheorie $\mathfrak{W}$ eintreten, deren Existenz und Eindeutigkeit wir in dem nun folgenden Hauptsatz dieser Arbeit behaupten:

Satz. *Zu vorgegebenem K, L, $\mathfrak{P}$, $L \Subset K$, gibt es genau eine Homologietheorie $\mathfrak{M}$, die extremal bezüglich $\mathfrak{P}$ ist.*

Ist $\mathfrak{P}$ die simpliziale Homologietheorie und L die Kategorie der Polyeder (s. obiges Beispiel) und $K \Supset L$ beliebig, so ist $\mathfrak{M}$ die singuläre Homologietheorie auf K.

Wir werden uns auf den folgenden Seiten dieser Arbeit mit dem Beweis dieses Satzes beschäftigen. Man kann in vergröberter Form den obigen Satz auch so aussprechen: Es gibt genau eine größte Homologietheorie auf der Kategorie K, die von den Elementen in $\mathfrak{P}$, welches auf einer Unterkategorie erklärt ist, induziert wird. Die Tatsache, daß wir hier nur von „absoluten" Homologietheorien sprechen und nicht auch von „relativen" (d. h. von solchen, die auf den Paaren (X, Y), $X, Y \in K$, $X \supset Y$ erklärt sind), hat keine prinzipiellen Ursachen, sondern liegt daran, daß die Beweise etwas länger würden, ohne daß neue Gesichtspunkte hinzukämen. Verlangt man von solchen relativen Homologietheorien sogar die Exaktheit (d. h. die Exaktheit der Homologiesequenz im Sinne von [1]), so darf man feststellen, daß Bedingung M 3) überflüssig wird, weil die Exaktheit sie von selbst liefert.

Wir wollen auf diesen Punkt aber nicht weiter eingehen, sondern uns im folgenden mit absoluten Homologietheorien beschäftigen.

1. Eindeutigkeitsbeweis. Seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ zwei Homologietheorien, die die Forderungen des Satzes erfüllen. Sei $\zeta_{\mathfrak{S}} \in H_n^{\mathfrak{S}}(X)$, $X \in K$. Nach M 2) gibt es ein $\eta \in H_n(Y)$, $Y \in L$, sowie ein $f : Y \to X$, $f \in K$, so daß $f_{*\mathfrak{S}}\eta = \zeta_{\mathfrak{S}}$ ist. Nach M 1) ist $\eta \in H_n^{\mathfrak{P}}(Y)$ und damit auch aus $H_n^{\mathfrak{T}}(Y)$, da auch $\mathfrak{T}$ extremal bezüglich $\mathfrak{P}$ ist. Man kann also

$$f_{*\mathfrak{T}}\eta = \zeta_{\mathfrak{T}} \in H_n^{\mathfrak{T}}(X)$$

bilden und wir definieren die Abbildung

$$\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$$

durch $\varphi\zeta_{\mathfrak{S}} = \zeta_{\mathfrak{T}}$.

1.1. *Es ist φ von der Auswahl von η unabhängig und ein Homomorphismus.*

Beweis. Es gibt nach M 3) für $\mathfrak{S}$ ein $\varphi' : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$, wir zeigen, daß $\varphi = \varphi'$ ist. Es ist:

$$f_{*\mathfrak{T}}\varphi'\eta = \varphi' f_{*\mathfrak{S}}\eta,$$

wegen M 3) ist aber $\varphi'\eta = \eta$ und nach Voraussetzung

$$f_{*\mathfrak{S}}\eta = \zeta_{\mathfrak{S}}.$$

Also haben wir

$$\varphi'\zeta_{\mathfrak{S}} = f_{*\mathfrak{T}}\eta.$$

Damit ist aber offenbar 1.1. vollständig bewiesen.

1.2. *Seien $\varphi, \psi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ zwei Homomorphismen, so ist*

$$\varphi = \psi .$$

Beweis. Genau wie oben sucht man sich zu einem festen $\zeta_{\mathfrak{S}}$ ein Paar η, f und man weist nach:

$$\varphi \zeta_{\mathfrak{S}} = f_{*\mathfrak{T}} \eta ,$$

$$\psi \zeta_{\mathfrak{S}} = f_{*\mathfrak{T}} \eta ,$$

was in gleicher Weise wie oben geschieht.

Wir werden im folgenden den Index $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}$, oder $\mathfrak{T}$ weglassen, wenn wir uns in $\mathfrak{P}$ befinden.

Wegen M 3) für $\mathfrak{T}$ gibt es einen Homomorphismus $\psi : \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$, für den ebenfalls 1.1., 1.2. gilt und wir behaupten:

1.3. *Es ist*

$$\varphi \cdot \psi = \textit{Identität (von } \mathfrak{T} \textit{ auf sich)} ,$$

$$\psi \cdot \varphi = \textit{Identität (von } \mathfrak{S} \textit{ auf sich)} .$$

Beweis. Offenbar haben wir aus Symmetriegründen nur die erste Zeile zu beweisen. Sei $\zeta_{\mathfrak{T}} \in H_n^{\mathfrak{T}}(X)$, η, f, Y ein Tripel zu $\zeta_{\mathfrak{T}}$ nach M 2). Es ist also

$$f_{*\mathfrak{T}} \eta = \zeta_{\mathfrak{T}}$$

und nach Definition

$$\psi \zeta_{\mathfrak{T}} = f_{*\mathfrak{S}} \eta = \zeta_{\mathfrak{S}} .$$

Offenbar leistet das Tripel η, f, Y aber auch für $\zeta_{\mathfrak{S}}$ das Verlangte: Es ist ja

$$f_{*\mathfrak{S}} \eta = \zeta_{\mathfrak{S}}$$

und $\eta \in \mathfrak{P}$, $Y \in L$. Also ist

$$\varphi \zeta_{\mathfrak{S}} = f_{*\mathfrak{T}} \eta = \zeta_{\mathfrak{T}} ,$$

d. h.

$$\varphi \cdot \psi \zeta_{\mathfrak{T}} = \zeta_{\mathfrak{T}} .$$

Durch 1.1.—1.3. ist der Eindeutigkeitsbeweis beendet.

2. Existenzbeweis. Wir gehen aus von einem $X \in K$ und betrachten Paare (η, f), wobei $\eta \in H_n(Y)$, $Y \in L$, $\eta \in \mathfrak{P}$, $f : Y \to X$ ist. Bisweilen setzen wir $Y = |\eta|$ (dem „Träger" von η).

Seien (η_1, f_1), (η_2, f_2) zwei Paare bzgl. X, so setzen wir

$$(\eta_1, f_1) \sim (\eta_2, f_2) ,$$

wenn es ein $Y \supset |\eta_1| \cup |\eta_2|$ gibt (d. h. wenn sich $|\eta_1| \cup |\eta_2|$ in Y einbetten läßt), so daß $Y \in L$ und

$$i_{1*} \eta_1 = i_{2*} \eta_2 = \eta$$

ist, mit den Inklusionen

$$i_j : |\eta_j| \to Y .$$

Ferner soll es eine Abbildung $f: Y \to X$, $f \in K$ geben, die Fortsetzung von f_j ist, d. h.

$$f \cdot i_j = f_j \quad (j = 1, 2).$$

Wir werden sogleich beweisen, daß es sich hierbei um eine Äquivalenzrelation handelt. Unter einem $\zeta_{\mathfrak{M}}$ verstehen wir eine Klasse von äquivalenten Paaren:

$$\zeta_{\mathfrak{M}} = \{(\eta, f)\},$$
$$|\zeta_{\mathfrak{M}}| = X,$$
$$H_n^{\mathfrak{M}}(X) = \{\zeta_{\mathfrak{M}} \mid |\zeta_{\mathfrak{M}}| = X\}.$$

2.1. *Es ist die „$\sim$"-Beziehung eine Äquivalenzrelation.*

Beweis.
a) Es ist

$$(\eta, f) \sim (\eta, f).$$

Beweis. Seien η', η'' zwei Exemplare von η und $h: |\eta'| \to |\eta''|$ ein Homöomorphismus. Mit Z bezeichnen wir den Abbildungszylinder von h und mit $i: |\eta'| \to Z$ die Inklusion in die Basis des Zylinders. Es ist

$$i_* \eta' = h_* \eta' = \omega \in \mathfrak{P}$$

und man kann f', f'' (die Abbildung f auf den beiden Exemplaren von $|\eta|$) auf Z fortsetzen:

$$F(y, t) = (f'(y'), 0) = (f'' h(y'), 1).$$

b) Die Symmetrie ist trivial, da von den beiden Paaren keines ausgezeichnet war.
c) Ist

$$(\eta_1, f_1) \sim (\eta_2, f_2),$$
$$(\eta_2, f_2) \sim (\eta_3, f_3),$$

so ist

$$(\eta_1, f_1) \sim (\eta_3, f_3).$$

Beweis. Sei Y', f' das Paar, welches die erste und Y'', f'' das Paar, welches die zweite Relation im Sinne unserer Definition vermittelt und seien

$$i'_j: |\eta_j| \to Y' \quad (j = 1, 2),$$
$$i''_k: |\eta_k| \to Y'' \quad (k = 2, 3)$$

die Inklusionen.

Wir setzen:

$$Y = Y' \cup Y''$$

nach Identifizierung der beiden Exemplare von $|\eta_2|$ in Y' und Y'', und haben die Inklusionen:

$$i_l: |\eta_l| \to Y \quad (l = 1, 2, 3),$$
$$r': Y' \to Y,$$
$$r'': Y'' \to Y.$$

Es ist $Y \in L$ und

$$i_{1*}\,\eta_1 = r'_*\,i'_{1*}\,\eta_1 = r'_*\,i'_{2*}\,\eta_2 = i_{2*}\,\eta_2\,,$$
$$i_{2*}\,\eta_2 = r''_*\,i''_{2*}\,\eta_2 = r''_*\,i''_{3*}\,\eta_3 = i_{3*}\,\eta_3\,.$$

Durch

$$f\cdot r' = f'\,,$$
$$f\cdot r'' = f''$$

wird eine Abbildung $f: Y \to X$ erklärt, da auf $Y' \cap Y'' = |\eta_2|$

$$f'\,|\,|\eta_2| = f''\,|\,|\eta_2| = f_2$$

ist.

Ist $g: X_1 \to X_2$, $g \in K$, so erklären wir

$$g_{*\mathfrak{M}}\,\zeta_{\mathfrak{M}} = \{(\eta, g\,f)\}\,.$$

Wir haben nachzuweisen:

2.2. *Ist*

$$(\eta_1, f_1) \sim (\eta_2, f_2)\,,$$

so ist

$$(\eta_1, g\,f_1) \sim (\eta_2, g\,f_2)\,.$$

Beweis. Möge η, Y, f die obere Äquivalenz herstellen, so stellt offenbar η, Y, $g\,f$ die untere Äquivalenz her.

2.3. *Ist $g \sim h$, so ist $g_{*\mathfrak{M}} = h_{*\mathfrak{M}}$. Es ist* M 2) *trivial.*

Beweis. Es gibt ein $F: X_1 \times I \to X_2$, $F \in K$, mit

$$F\cdot i'_0 = g\,,$$
$$F\cdot i'_1 = h\,,$$

wenn $i'_t: X_1 \to X_1 \times I$ die Inklusionen $i'_t(x) = (x, t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, sind. Ist (η, f) ein Paar, so ist auch $g\,f \sim h\,f$ mit der Abbildung

$$H: Y \times I \to X_2 \qquad (Y = |\eta|)\,,$$
$$H(y, t) = F(f\,y, t)\,, \quad y \in Y,\ 0 \leqq t \leqq 1\,.$$

Seien $i_t: Y \to Y \times I$ die entsprechenden Inklusionen, so ist:

$$i_{0*}\,\eta = i_{1*}\,\eta = \sigma\,.$$

Da $Y \times I \in L$ ist (nach K 1)), ist auch (σ, H) ein Paar, welches die Äquivalenz

$$(\eta, g\,f) \sim (\eta, h\,f)$$

liefert.

Seien $\zeta_{1\mathfrak{M}} = \{(\eta_1, f_1)\}$, $\zeta_{2\mathfrak{M}} = \{(\eta_2, f_2)\}$ zwei Klassen für festes $X \in K$. Wir setzen $Y = |\eta_1| \cup |\eta_2|$ und

$$\eta = i_{1*}\,\eta_1 + i_{2*}\,\eta_2\,,$$

mit den Inklusionen

$$i_j : |\eta_j| \to Y \quad (j = 1, 2).$$

Sei $f : Y \to X$ durch $f \cdot i_j = f_j$ erklärt, so definieren wir

$$(\eta_1, f_1) + (\eta_2, f_2) = (\eta, f)$$

und

$$\{(a\eta, f)\} = a\{(\eta, f)\}, \quad a \in G.$$

2.4. *Ist* $(\eta_1, f_1) \sim (\eta_1', f_1')$, $(\eta_2, f_2) \sim (\eta_2', f_2')$, *so ist*

$$(\eta_1, f_1) + (\eta_2, f_2) \sim (\eta_1', f_1') + (\eta_2', f_2').$$

Beweis. Es möge σ_1, h_1, bzw. σ_2, h_2 die erste, bzw. zweite Äquivalenz vermitteln. Seien $Z = |\sigma_1| \cup |\sigma_2|$ und $h : Z \to X$ die Fortsetzung von h_1, h_2 auf Z. Es ist

$$(\eta_1, f_1) + (\eta_2, f_2) \sim (i_{1*}\eta_1 + i_{2*}\eta_2, h) \sim (\eta_1', f_1') + (\eta_2', f_2'),$$

wenn

$$i_j : |\eta_j| \to Z$$

die Inklusionen sind.

2.5. *Die soeben erklärte Addition macht aus $H_n^{\mathfrak{M}}(X)$ eine abelsche Gruppe.*

Beweis.

a) Ist $0_Y \in H_n(Y)$ das neutrale Element $Y \in L$ und $f_Y : Y \to X$ eine beliebige Abbildung in K, so ist $0_X = \{(0_Y, f_Y)\}$. Man sieht sofort, daß gilt

$$(0_Y, f_Y) \sim (0_{Y'}, f_{Y'})$$

für zwei beliebige derartige Paare.

Es ist

$$(\eta, f) + (0_Y, f_Y) \sim (\eta, f).$$

Das Paar, welches die Äquivalenz herstellt, wird wieder durch

$$\sigma = i_* \eta$$

gegeben, wobei $|\sigma| = |\eta \times I| \cup Y$ und $i : |\eta| \to |\sigma|$ die Inklusion ist. Die Abbildung F wird komponentenweise erklärt.

b) Sei $\zeta_{\mathfrak{M}} = \{(\eta, f)\}$, so ist $-\zeta_{\mathfrak{M}} = \{(-\zeta, f)\}$ und

$$\zeta_{\mathfrak{M}} + (-\zeta_{\mathfrak{M}}) = 0_X = \{(0_Y, f_Y)\}.$$

Beweis. Man geht genauso vor, wie im Beweis von 2.1.a) und findet jetzt

$$i_* \eta + h_*(-\eta) = 0,$$

wobei $i : |\eta| \to Z$ die Inklusion von $|\eta|$ in die Basis von Z ist.

c) Es ist die Addition assoziativ.

Beweis. Seien (η_i, f_i), $i = 1, 2, 3$, gegeben. Wir definieren $|\eta_i| = Y_i$ und

$$Z = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$$

mit den Inklusionen:

$$i_j : Y_j \to Z, \quad j = 1, 2, 3.$$

Nun ist

$$((\eta_1, f_1) + (\eta_2, f_2)) + (\eta_3, f_3) \sim (i_{1*}\eta_1 + i_{2*}\eta_2 + i_{3*}\eta_3, F) \sim$$
$$\sim (\eta_1, f_1) + ((\eta_2, f_2) + (\eta_3, f_3)),$$

wobei

$$F : Z \to X$$

die Abbildung ist mit

$$F\, i_j = f_j.$$

d) Die Kommutativität ist trivial.

2.6. *Ist $g : X \to Z$, so ist $g_{*\mathfrak{M}}$ ein Homomorphismus.*

Beweis. Sei

$$(\eta_1, f_1) + (\eta_2, f_2) = (\eta, f),$$

so ist offenbar

$$(\eta_1, g f_1) + (\eta_2, g f_2) = (\eta, g f).$$

Ferner ist

$$g_{*\mathfrak{M}}(a\zeta_{\mathfrak{M}}) = a g_{*\mathfrak{M}}(\zeta_{\mathfrak{M}}), \quad a \in G.$$

2.7. *Ist $X \in L$, so ist*

$$H_n^{\mathfrak{M}}(X) = H_n^{\mathfrak{P}}(X).$$

Beweis. Ist (η, f) ein Paar und ist $f \sim \tilde{f}$, so ist offenbar $(\eta, f) \sim (\eta, \tilde{f})$, nach demselben Schluß über $|\eta| \times I$, wie im Beweis von 2.3. Seien also (η, f), (η', f') zwei Paare, die die beiden Elemente $\zeta_{\mathfrak{M}} = \{(\eta, f)\}$, $\zeta'_{\mathfrak{M}} = \{(\eta', f')\}$ definieren, $f_*\eta = f_*\eta'$. Nach Voraussetzung kann man zu Abbildungen übergehen, die zu f, f' homotop sind und in L liegen; also nehmen wir an, daß $f, f' \in L$ ist. Wir bilden den Abbildungszylinder $Z(Z')$ von $f(f')$ und $C = Z \cup Z'$, nach der Identifizierung von X, welches als ,,Dach" in beiden vorkommt. Da $|\eta|, |\eta'|, X \in L$ ist, ist nach K 3) auch $C \in L$ und

$$i_*\eta = i'_*\eta'$$

mit den Inklusionen:

$$i : |\eta| \to Z,$$
$$i' : |\eta'| \to Z.$$

Es ist also

$$(\eta, f) \sim (\eta', f')$$

und darum

$$\zeta_{\mathfrak{M}} = \zeta'_{\mathfrak{M}}.$$

Ist $\zeta \in H_n^{\mathfrak{P}}(X)$, so liefert die Klasse (ζ, Identität) ein Element aus $\mathfrak{M}$.

2.8. a) *Seien $f, g \in K$,*

$$X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{g} X_3,$$

so ist

$$(gf)_{*\mathfrak{M}} = g_{*\mathfrak{M}} f_{*\mathfrak{M}}.$$

b) *Ist $f \in K$ die Identität, so ist $f_{*\mathfrak{M}} =$ Identität.*

Beweis.

a) Es ist

$$(gf)_{*\mathfrak{M}}(\{(\eta, h)\}) = \{(\eta, gfh)\} = g_{*\mathfrak{M}}\{(\eta, fh)\} = g_{*\mathfrak{M}} f_{*\mathfrak{M}}\{(\eta, h)\}.$$

b) Es ist

$$f_{*\mathfrak{M}}\{(\eta, h)\} = \{(\eta, fh)\} = \{(\eta, h)\}.$$

2.9. *Ist $x \in K$ ein Punkt, so ist $H_n^{\mathfrak{M}}(x) = 0 \quad (n > 0)$.*

Beweis. Nach 2.7. ist $H_n^{\mathfrak{M}}(x) = H_n^{\mathfrak{P}}(x)$, da $x \in L$ und darum

$$H_n^{\mathfrak{M}}(x) = 0, \quad n > 0.$$

2.10. *Die Inklusionen $i_j : X_j \to X = X_1 \cup X_2$ $(j = 1, 2)$ liefern eine Zerlegung*

$$H_n(X) = H_n(X_1) + H_n(X_2).$$

Beweis. Sei $\zeta_{\mathfrak{M}} \in H_n^{\mathfrak{M}}(X)$, $\zeta_{\mathfrak{M}} = \{(\eta_1, f)\}$ $Y = |\eta|$, so nehmen wir das Urbild $Y_1 = f^{-1}(f(Y) \cap X_1)$, $Y_2 = f^{-1}(f(Y) \cap X_2)$ und finden die Abbildungen

$$f_i = f \,|\, Y_i, \quad i = 1, 2,$$

sowie die Inklusionen:

$$j_k : Y_k \to Y.$$

Es ist Y topologische Summe von Y_1 und Y_2 und daher ist

$$\eta = j_{1*}\eta_1 + j_{2*}\eta_2$$

nach $\mathfrak{B}$ 3), mit gewissen $\eta_1 \in H_n(Y_1)$, $\eta_2 \in H_n(Y_2)$. Also ist

$$(\eta, f) = (\eta_1, f_1) + (\eta_2, f_2),$$

$$\zeta_{\mathfrak{M}} = i_{1*\mathfrak{M}}\zeta_{1\mathfrak{M}} + i_{2*\mathfrak{M}}\zeta_{2\mathfrak{M}}$$

mit

$$\zeta_{k\mathfrak{M}} = \{(\eta_k, f_k)\}, \quad k = 1, 2.$$

Durch (η, f) ist zunächst Y_1, Y_2 und f_1, f_2 eindeutig bestimmt. Wegen $\mathfrak{B}$ 3) ist dadurch aber auch η_1, η_2 eindeutig bestimmt. Da die Zerlegung durch die Inklusionsabbildungen induziert wird, ist aber damit auch die Darstellung von $\zeta_{\mathfrak{M}}$ eindeutig bestimmt: Ist $(\eta, f) \sim (\eta', f')$ und

$$(\eta, f) = (\eta_1, f_1) + (\eta_2, f_2),$$

$$(\eta', f') = (\eta_1', f_1') + (\eta_2', f_2'),$$

ist ferner (σ, F) das Paar, welches diese Äquivalenz liefert, so ist auch

$$(\sigma, F) = (\sigma_1, F_1) + (\sigma_2, F_2).$$

Es liefert dann das Paar (σ_j, F_j) eine Äquivalenz zwischen (η_j, f_j) und (η_j', f_j').

2.11. *Ist $\mathfrak{T}$ irgend eine* M 1) *und* M 2) *erfüllende Homologietheorie, so gibt es ein $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{T}$.*

Beweis. Sei $\zeta_{\mathfrak{M}} = \{(\eta, f)\} \in \mathfrak{M}$, so setzen wir $\varphi \zeta_{\mathfrak{M}} = f_{*\mathfrak{T}} \eta$.

a) Ist $(\eta, f) \sim (\eta', f')$, so ist $f_{*\mathfrak{T}} \eta = f'_{*\mathfrak{T}} \eta'$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein (σ, g), $|\sigma| \supset |\eta|, |\eta'|$, so daß

$$i_{\eta *} \eta = i_{\eta' *} \eta' = \sigma$$

mit den Inklusionen $i_\eta : |\eta| \to |\sigma|$, $i_{\eta'} : |\eta'| \to |\sigma|$ ist, außerdem gibt es eine Fortsetzung F von f, f' auf $|\sigma|$, $F : |\sigma| \to X (= |\zeta_{\mathfrak{M}}|)$. Es ist

$$f_{*\mathfrak{T}} \eta = F_{*\mathfrak{T}} i_{\eta *} \eta = F_{*\mathfrak{T}} \sigma,$$
$$f'_{*\mathfrak{T}} \eta' = F_{*\mathfrak{T}} i_{\eta' *} \eta' = F_{*\mathfrak{T}} \sigma.$$

b) Ist $g : X_1 \to X_2$, so ist

$$\varphi g_{*\mathfrak{M}} = g_{*\mathfrak{T}} \varphi.$$

Beweis. Es ist

$$\varphi g_{*\mathfrak{M}} \zeta_{\mathfrak{M}} = \varphi \{(\eta, g f)\} = g_{*\mathfrak{T}} f_{*\mathfrak{T}} \eta,$$
$$g_{*\mathfrak{T}} \varphi \zeta_{\mathfrak{T}} = g_{*\mathfrak{T}} f_{*\mathfrak{T}} \eta.$$

c) Es ist

$$\varphi(\alpha \zeta_{1\mathfrak{M}} + \beta \zeta_{2\mathfrak{M}}) = \alpha \varphi(\zeta_{1\mathfrak{M}}) + \beta \varphi(\zeta_{2\mathfrak{M}}).$$

Beweis. Sei $\zeta_{1\mathfrak{M}} = \{(\eta_1, f_1)\}$, $\zeta_{2\mathfrak{M}} = \{(\eta_2, f_2)\}$, so ist

$$\alpha \zeta_{1\mathfrak{M}} + \beta \zeta_{2\mathfrak{M}} = (\alpha i_{1*} \eta_1 + \beta i_{2*} \eta_2, F),$$

wobei

$$i_j : |\eta_j| \to |\eta_1| \cup |\eta_2|$$

die Inklusionen und

$$F : |\eta_1| \cup |\eta_2| \to X,$$
$$X = |\zeta_{1\mathfrak{M}}| = |\zeta_{2\mathfrak{M}}|$$

die Fortsetzung von f_1, f_2 ist.

Es ist nun:

$$\varphi(\alpha \zeta_{1\mathfrak{M}} + \beta \zeta_{2\mathfrak{M}}) = F_{*\mathfrak{T}}(\alpha i_{1*} \eta_1 + \beta i_{2*} \eta_2) = \alpha f_{1*\mathfrak{T}} \eta_1 + \beta f_{2*\mathfrak{T}} \eta_2,$$
$$\alpha \varphi(\zeta_{1\mathfrak{M}}) + \beta \varphi(\zeta_{2\mathfrak{M}}) = \alpha f_{1*\mathfrak{T}} \eta_1 + \beta f_{2*\mathfrak{T}} \eta_2.$$

Damit ist aber 2.11. vollständig bewiesen.

3. Isomorphie von $\mathfrak{M}$ mit der singulären Homologietheorie $\mathfrak{S}$. Bezüglich der Definition der singulären Homologietheorie $\mathfrak{S}$ verweisen wir auf [1]. Bezüglich der Eigenschaften des singulären Komplexes $S(X)$ eines topologischen Raumes und seiner Realisierung $R(X)$ verweisen wir auf [2]. Dort finden sich auch weitere Literaturhinweise.

3.1. *Es erfüllt* $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{B}$ 1) — $\mathfrak{B}$ 3) *sowie* M 1).

Beweis. S. [1].

3.2. *Es gilt für $\mathfrak{S}$ M 2).*

Beweis. Sei X ein topologischer Raum und

$$z_n = \sum_{i=1}^{N} a_i(\sigma_i^n, f_i)$$

ein singulärer Zyklus auf X. Wir konstruieren ein endliches Polyeder $P \subset R(X)$, indem wir alle Simplexe $\tilde{\sigma}_i^n$ in $R(X)$ aufsuchen, die den singulären Simplexen (σ_i^n, f_i) entsprechen. Es besteht P aus diesen Simplexen und seinen Rändern. Die Kette

$$\tilde{z}_n = \sum a_i \tilde{\sigma}_i^n$$

ist ein Zyklus auf P und es gibt eine Abbildung $f: P \to X$, die gerade die einzelnen f_i fortsetzt. Ist $\tilde{\zeta}$ die Homologieklasse von $\tilde{z}_n$ auf P und ζ die Klasse von z_n in X, so ist

$$f_* \tilde{\zeta} = \zeta.$$

Damit ist M 2) für $\mathfrak{S}$ gezeigt.

3.3. *Es gilt für $\mathfrak{S}$ M 3).*

Beweis. Sei $\mathfrak{S}$ die singuläre Homologietheorie und $\mathfrak{V}$ irgend eine andere, die M 1), M 2) erfüllt. Wir konstruieren einen Homomorphismus $\varphi': \mathfrak{S} \to \mathfrak{V}$. Offenbar genügt es, ein $\varphi: \mathfrak{S} \to \mathfrak{M}$ zu finden, da man wegen M 3) für $\mathfrak{M}$ dann auch schon ein $\varphi': \mathfrak{S} \to \mathfrak{V}$ hat. Sei $\zeta_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$, so finden wir ein Paar (η, f), da $\mathfrak{S}$ M 2) erfüllt, wie wir eben gezeigt haben. Es wird definiert:

$$\varphi \zeta_{\mathfrak{S}} = \{(\eta, f)\}.$$

Sei (η', f') ein anderes Paar mit $f_{*\mathfrak{S}}\eta = f'_{*\mathfrak{S}}\,\eta' = \zeta_{\mathfrak{S}}$, so finden wir auch die beiden singulären Zyklen in $\mathfrak{S}$, z, z', durch deren Realisierung (s. Beweis von 3.2.) wir η, η' gefunden haben. Da $z \sim z'$ in $X (= |\zeta_{\mathfrak{S}}|)$ ist, gibt es eine singuläre Kette x, mit

$$\partial x = z - z'.$$

Wir können auch x in $R(X)$ realisieren und finden ein $Y \supset |\eta|, |\eta'|$ sowie ein $\sigma \in$ $\in H_n(Y)$, so daß

$$i_{\eta*}\eta = i_{\eta'*}\eta' = \sigma$$

mit den Inklusionen

$$i_\eta: |\eta| \to |\sigma|,$$
$$i_{\eta'}: |\eta'| \to |\sigma|$$

ist. Es ist zwar $Y \in L$, aber nicht $|\eta| \cap |\eta'| = \emptyset$. Aber auch das kann man leicht erreichen, indem man etwa an Stelle von Y das Polyeder $Y' = Y \times I$ und η auf dem Boden und η' auf dem Dach des Zylinders nimmt. Da es ein $F: Y \to X$ gibt, welches f, f' fortsetzt, gibt es dasselbe auch für Y', wenn man noch die Projektion $p: Y \times I \to Y$ hinzunimmt. Es ist also $(\eta, f) \sim (\eta', f')$ wegen der Existenz des Paares (σ, F) und φ nur von der Klasse von (η, f) abhängig. Die weiteren Homomorphieeigenschaften von φ werden in der schon mehrfach durchgeführten Form bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] S. EILENBERG and N. STEENROD, Foundations of Algebraic Topology. Princeton Univ. Press 1952.
[2] S. T. HU, Homotopy Theory. Academic Press, New York u. London 1959.

Eingegangen am 18. 8. 1961

Anschrift des Autors:
Friedrich-Wilhelm Bauer
Mathematisches Seminar
der Universität
Frankfurt (Main)

Homomorphisms of Finite Planar Half-Loops

By

T. G. OSTROM[1])

1. Introduction. The author introduced the notion of planar half loops in [3][2]); a complete set of axioms is given in that paper. A planar half-loop which is a loop is called a planar loop. A planar loop is essentially a loop admitting the analogue of ANDRE's congruence [1].

The planar half-loop $L(+)$ is equivalent to an affine plane π in the following sense: The points of π are the elements of L. If P and Q are on different lines through the reference point O (which is the identity of L), then $P+Q$ is defined and is the intersection of a line through P parallel to OQ with a line through Q parallel to OP.

Addition of pairs of points collinear with O is not necessarily defined; however, each line through O ("O-line") plays the role of a subloop with a coset decomposition of L. These cosets are identified with lines parallel to the given O-line.

Homomorphisms and automorphisms of L thus have geometric implications. BRUCK [2] has shown that a finite loop admitting a transitive group of automorphisms is a group of prime power order unless it is simple.

Some of our arguments may apply to the infinite case but we repeatedly make strong use of finiteness. It will be assumed throughout that L is finite, except in Part 2.

We investigate the nature of the possible homomorphic images of L. We show that if the homomorphic image is relatively large and associative, then L must be associative. In certain cases, we obtain what may be considered to be a kind of homomorphism between affine planes.

2. Automorphisms and Isomorphisms. Unless indicated to the contrary, it is to be assumed that addition is not defined in L for pairs of points collinear with O (except that $P+O=P$). In this case, L will be called a strict planar half loop. We shall use the symbol $\bar{L}$ to denote any loop related to L in the following way: the elements of $\bar{L}$ are the elements of L; if $P+Q=R$ in L, then $P+Q=R$ in $\bar{L}$.

Note that $\bar{L}$ is not uniquely determined by L and that an automorphism or homomorphism of L is not necessarily an automorphism or homomorphism of $\bar{L}$. While L can always be extended to a loop $\bar{L}$, it is not clear that this can always be done in such

---

1) This work was supported (in part) by grant No. NSF-G 16299 from the National Science Foundation.

2) Theorem 9 of reference [3] is stated incorrectly. It should read as follows: "Let L be a planar loop which is the direct sum of two loops L_1 and L_2. Let Θ_1 and Θ_2 be homomorphisms from L onto L_1 and L_2. Suppose that there is an O-line OQ such that $(OQ)\Theta_j$ and $(OQ+R)\Theta_j$ are isomorphic to L_j, $j=1,2$. Then L is associative."

a way as to preserve a given set of automorphisms or homomorphisms. Note also that the O-lines will be subloops of $\bar{L}$. Possible applications of BRUCK's theorem mentioned earlier will have to be made in $\bar{L}$; they might involve $\bar{L}$ itself or one of the O-lines.

As mentioned in [3], each collineation of π which fixes O is an automorphism of L, and vice versa. If the collineation fixes OP and is an automorphism of $\bar{L}$, it is also an automorphism of the subloop OP of $\bar{L}$.

Now let π be extended to a projective plane π^* by adjoining the line at infinity. Let O' be an arbitrary point of π^* and let l'_∞ be an arbitrary line of π^*, subject to the restriction of $O' \notin l'_\infty$.

Using l'_∞ as the new line at infinity, we obtain a new affine plane. Using O' as a new reference point, we obtain a new planar half loop $L'(\oplus)$. Let σ be a collineation of π^* such that $l_\infty \sigma = l'_\infty$, $O\sigma = O'$. Recalling the geometric interpretation of addition, if $P + Q$ is not defined then $P\sigma \oplus Q\sigma$ is not defined and if $P + Q = R$, then $P\sigma \oplus Q\sigma = R\sigma$. Thus σ induces an isomorphism between L and L'.

Conversely, suppose that σ is an isomorphism from L to L'. The points on l_∞ have no images; the points on l'_∞ have no preimages. Otherwise, the set of points on an O-line must correspond to points on an O'-line. Since a line of π which is parallel to OP is a "coset" $OP + Q$ of OP and $(OP + Q)\sigma = (OP)\sigma \oplus Q\sigma$, σ is an incidence preserving mapping from π onto the affine plane relative to l'_∞.

Since parallel classes map into parallel classes, σ can be extended to map points on l_∞ into points on l'_∞. In this extended sense, σ is a collineation of π^*. We have proved the following Theorem:

Theorem 1[3]. *If L and L' are two strict planar half loops defined respectively with reference to O and l_∞, O' and l'_∞ in the same projective plane π^*, then L and L' are isomorphic if and only if there is a collineation σ of π^* such that $O\sigma = O'$, $l_\infty \sigma = l'_\infty$.*

Theorem 2. *Let $L(+)$ and $L'(\oplus)$ be two strict planar half loops and let ϱ, σ, and τ be one to one mappings of L onto L' such that $P\varrho \oplus Q\sigma = (P + Q)\tau$ whenever addition is defined on both sides of the equation and $P + Q$ is defined if and only if $P\varrho \oplus Q\sigma$ is defined. Then $\varrho = \sigma = \tau$.*

Proof. If P_1 and P_2 are on the same O-line, $P_1 + P_2$ is not defined so that $P_1\varrho$ and $P_2\sigma$ must be on the same O'-line. Fixing P_1, all points P_2 on OP_1 must be carried by σ into points on $O'(P_1\varrho)$. That is, σ carries O-lines into O'-lines. Hence $O\sigma = O'$. Hence $P\tau = P\varrho \oplus O' = P\varrho$. Similarly, $O\varrho = O'$ and $Q\sigma = Q\tau$.

3. Homomorphisms. Now let $L'(\oplus)$ be a set with an operation $\oplus$ and identity O'. Let Θ be a mapping from L onto L' such that whenever $P + Q$ is defined, then $P\Theta \oplus Q\Theta$ is defined and $(P + Q)\Theta = P\Theta \oplus Q\Theta$. $P\Theta \oplus Q\Theta$ may be defined even if $P + Q$ is not defined. Let $\mathfrak{K}$ be the kernel of Θ.

In the following, we shall make use of the convention that the same letter P with various modifications such as P_i, $\bar{P}$, P', etc. will be used to denote various members

[3]) Theorem 1 is due to Mr. DENNIS LAWRENCE, who participated in an NSF supported undergraduate research program under the direction of the author. In the same program, Mr. DAVID MORGAN carried out a preliminary investigation of homomorphisms of the planar half loops corresponding to Desarguesian planes.

of the same O-line OP. One modification is that $K_1, K_2, \ldots$ will be used to denote members of $\mathfrak{K}$, not necessarily on the same O-line. We shall henceforth use the same symbol "+" to indicate operations in both L and L'.

We shall make considerable use of the coset property of O-lines — i.e. if $P + Q$ is a point on the line $OP + Q$ which is parallel to OP and goes through Q, then for each P_i there exists P_j such that $P_i + (P + Q) = P_j + Q$.

Conversely, given P_j there exists P_i such that the same equation holds. In particular, we may take $P_j = O$. These are direct consequences of postulate (6) in the definition of planar half-loops in [3].

Now let k denote the number of points in $\mathfrak{K}$ and let k_P denote the number of points in $OP \cap \mathfrak{K}$. If π is of order n, then L consists of n^2 elements and each O-line of L contains n elements.

Let us say that P is equivalent to Q if $P\Theta = Q\Theta$.

Lemma 1. *Any point P is equivalent to $k - k_P$ points not on OP. If $k \neq k_P$, then P is equivalent to k_P points on OP and to k points in L.*

Proof. If $Q \notin OP$, there exists a unique point X not on OP such that $P + X = Q$. If L' has a unique identity, then $P\Theta = Q\Theta$ if and only if $X \in \mathfrak{K}$. The $k - k_P$ elements of $\mathfrak{K}$ which are not on OP thus correspond to $k - k_P$ points equivalent to P.

If $k \neq k_P$, there exists $K \in \mathfrak{K}$ not on OP. Given P_1 and P_2, there exists a unique P_3 such that $(P_1 + K) + P_3 = P_2$. It follows that $P_1\Theta = P_2\Theta$ if and only if $P_3 \in \mathfrak{K}$. The lemma follows.

Lemma 2. *If $\mathfrak{K} \not\subset OP$, then $P\Theta + Q\Theta$ is defined for all $Q\Theta$ in L' and $P\Theta + Q\Theta = P\Theta + R\Theta$ implies that $Q\Theta = R\Theta$.*

Proof. $P + Q$ is defined unless $Q \in OP$. If $k \neq k_P$, $P\Theta = R\Theta$ for some point R such that $R + Q$ is defined. Thus $P\Theta + Q\Theta$ must be either $(P + Q)\Theta$ or $(R + Q)\Theta$ and is defined in any case.

If we hold P fixed and let Q vary over all points not on OP, then $P + Q$ varies over all points not on OP. Hence $P\Theta + Q\Theta$ varies over all elements of L' as $Q\Theta$ varies over all elements of L'. In the finite case, this implies that $P\Theta + Q\Theta$ must take on each value of L' exactly once.

Lemma 3. *If $\mathfrak{K} \not\subset OP$, then for each $P_1, P_2 \in OP$ there is at least one $P_3 \in OP$ such that $P_1\Theta + P_3\Theta = P_2\Theta$ and for each P_1, P_3 there is at least one P_2 such that the same equation holds.*

Proof. The essential part of the argument is given in the last part of the proof of Lemma 1 except that P_1 and P_3 also determine P_2.

Theorem 3. (1) *If $\mathfrak{K} \not\subset OP$, then the set $(OP)\Theta$ of images of OP is a subloop of L'.*

(2) *If the points of $\mathfrak{K}$ are not all on the same O-line, or if $OP = \mathfrak{K}$ for some O-line OP, then L' is a commutative loop.*

(3) *If OP and OQ are distinct O-lines, then $(OP)\Theta + (OQ)\Theta = L'$.*

Proof. (1) Follows from Lemmas 2 and 3.

(2) If $OP = \mathfrak{K}$, then $(OP)\Theta = O'$. Thus either

$$\text{if } OP = \mathfrak{K} \quad \text{or} \quad \mathfrak{K} \not\subset OP, \quad \text{for any } OP,$$

it follows from Lemmas 2 and 3 that L' is a loop. The commutative property follows from the commutative property of L.

(3) If $R \in L$, then, for some P_i and Q_j, $P_i + Q_j = R$. Hence $R\Theta = P_i\Theta + Q_j\Theta$.

Corollary. *If OP and OQ are distinct O-lines and $(OP)\Theta = O'$, then $(OQ)\Theta = L'$.*

Remark. Note that the case where, (for some O-line OP), $\mathfrak{K} \subset OP$ but $\mathfrak{K} \neq OP$ is exceptional in that addition on $(OP)\Theta$ need not be defined. If $\mathfrak{K} = O$ (i.e. $k = k_P = 1$ for every O-line OP), L' could be isomorphic to either L or to $\bar{L}$ and still satisfy the conditions that we have imposed on Θ.

Henceforth, even in the exceptional case, Θ is to be understood as a homomorphism onto a commutative loop L' such that the image of every O-line is a subloop of L'. All of this would follow immediately if Θ were an automorphism of $\bar{L}$.

In the last corollary, all of the subloops of L' corresponding to the O-lines of L were improper. The case where L' is a planar loop is of especial interest; hence we shall be looking for proper subloops of L' such that each element of L' can be uniquely represented as a sum of elements of two of these subloops.

Now let h denote the number of elements of L' and let h_P denote the number of elements of L' in $(OP)\Theta$.

Lemma 4. *$hk = n^2$ and, if $\mathfrak{K} \not\subset OP$, $h_P k_P = n$.*

Proof. There are n^2 elements in L and n elements in OP. The result then follows from Lemma 1.

As an additional restriction on Θ, we shall assume that $h_P k_P = n$ even in the exceptional case.

Theorem 4. *If no O-line maps into O', then at least two O-lines have images which are proper subloops of L'.*

Proof. We are reduced to two cases: (1) Every O-line maps onto L' or (2) Every O-line but one maps onto L'.

Now if $(OP)\Theta = L'$, then $h = h_P$. It follows from Lemma 4 that $k = h k_P^2 = n k_P$. Recalling that there are $n + 1$ O-lines and that each O-line contains O, we get in case (1) that

$$n k_P = k = (n+1)(k_P - 1) + 1,$$

$$0 = k_P - n.$$

Hence $OP \subset \mathfrak{K}$ and $(OP)\Theta = O'$ for every O-line. By Theorem 3, $L' = O'$.

Similarly, in case (2), if OQ is the only O-line which does not map onto L',

$$n k_P = n(k_P - 1) + k_Q$$

and

$$k_Q = n$$

so that $(OQ)\Theta = O'$. In both cases, we obtain a contradiction.

Lemma 5. *If OP and OQ are two distinct O-lines, the following five conditions are equivalent;*

(1) $h_P h_Q = h$.

(2) $k_P k_Q = k$.

(3) *Each element of L' can be represented uniquely as a sum of an element of $(OP)\Theta$ with an element of $(OQ)\Theta$.*

(4) *Each element of $\mathfrak{K}$ can be represented as a sum $P_i + Q_j$, where $P_i \in OP \cap \mathfrak{K}$, $Q_j \in OQ \cap \mathfrak{K}$.*

(5) $(OP)\Theta \cap (OQ)\Theta = O'$.

Proof. The equivalence of (1) and (2) follows from the equations $hk = n^2$, $h_P k_P = h_Q k_Q = n$.

The number of sums that can be formed by adding an element of $(OP)\Theta$ to an element of $(OQ)\Theta$ is $h_P h_Q$. Every element of L' is included at least once in these $h_P h_Q$ sums, so that $h_P h_Q \geqq h$, with the equality sign holding if and only if each element of L' is represented exactly once. Thus (3) is equivalent to (1).

In L, $P_i + Q_j = \bar{P}_i + \bar{Q}_j$ if and only if $P_i = \bar{P}_i$, $Q_j = \bar{Q}_j$. Hence exactly $k_P k_Q$ distinct elements of $\mathfrak{K}$ may be represented in the form $P_i + Q_j$ if P_i is restricted to $OP \cap \mathfrak{K}$ and Q_j is restricted to $OQ \cap \mathfrak{K}$. Thus $k_Q k_P \leqq k$, with the equality sign holding if and only if $\mathfrak{K} = (OP \cap \mathfrak{K}) + (OQ \cap \mathfrak{K})$. This establishes the equivalence of (4) with (2).

Clearly (3) implies (5). Suppose that $(OP)\Theta \cap (OQ)\Theta = O'$ and that $P\Theta + Q\Theta = \bar{P}\Theta + \bar{Q}\Theta$. Let $\tilde{P}$ be determined so that $\tilde{P} + (P + Q) = Q$, and let P^* be determined so that $\tilde{P} + (\bar{P} + \bar{Q}) = P^* + \bar{Q}$. Then

$$Q\Theta = \tilde{P}\Theta + (P + Q)\Theta = \tilde{P}\Theta + (\bar{P} + \bar{Q})\Theta = P^*\Theta + \bar{Q}\Theta.$$

Since $(OQ)\Theta$ is a loop this implies that $P^*\Theta \in (OQ)\Theta$ and hence that $P^*\Theta = O'$. Hence $Q\Theta = \bar{Q}\Theta$. Similarly, $P\Theta = \bar{P}\Theta$. Thus, assuming (5), we get (3).

Theorem 5. *Let OP, OQ, OR be distinct O-lines.*

(1) *If $(OP)\Theta \cap (OQ)\Theta = O'$, then $h_R \geqq h_P$, and $k_R \leqq k_P$.*

(2) *If $(OP)\Theta$, $(OQ)\Theta$ and $(OR)\Theta$ are pairwise disjoint except for O', then $h_P = h_Q = h_R$, $k_P = k_Q = k_R$, $h = h_P^2$ and $k = k_P^2$.*

Proof. (1) If $(OP)\Theta \cap (OQ)\Theta = O'$, then $h_R h_Q \geqq h = h_P h_Q$. Hence $h_R \geqq h_P$. Similarly, $k_R \leqq k_P$.

(2) Under the hypotheses, $h_P h_Q = h_P h_R = h_Q h_R = h$. The Theorem follows.

Theorem 6. *If* (1) *there are $m + 1$ O-lines each containing k_2 points of $\mathfrak{K}$ and the remaining O-lines each contain k_1 points of $\mathfrak{K}$,*

(2) $h = m^2$,

(3) $k = k_2^2$,

then L' is a planar loop. The image of each O-line of L is either L' or is an O'-line of L'. If π' is the affine plane corresponding to L', then the image of each line of π is either a line of π' or is the set of all points of π'.

Proof. The condition $k = k_2^2$ implies that the O-lines which contain k_2 points of $\mathfrak{K}$ are disjoint except for O'. Each of these has an image consisting of h_2 points, where $k_2 h_2 = n$. Since $n^2 = hk = m^2 k_2^2$, it follows that $mk_2 = n$ and $h_2 = m$. The $m + 1$ O-lines of type k_2 map into $m + 1$ sets each containing m elements. It follows that each element of L' other than O' belongs to exactly one of the images of the O-lines of type k_2. These sets will be the O'-lines of L'. The other properties of a planar half loop have either already been established for L' or follow directly from the fact that Θ is a homomorphism.

Thus L' is a planar loop and the O'-lines are images of O-lines of type k_2.

To determine the images of the O-lines of type k_1, we must get the relation between k_1 and k_2. Since there are $n + 1$ O-lines altogether, the points of $\mathfrak{K}$ distinct from O occur in sets of $k_2 - 1$ on the $m + 1$ O-lines of type k_2 and in sets of $k_1 - 1$ on the $n - m$ O-lines of type k_1. Hence

$$k = k_2^2 = (m + 1)(k_2 - 1) + (n - m)(k_1 - 1) + 1 .$$

Replacing n by $k_2 m$,

$$(m + 1)(k_2 - 1) + m(k_2 - 1)(k_1 - 1) = k_2^2 - 1 ,$$

$$m + 1 + m(k_1 - 1) = k_2 + 1 ,$$

$$m k_1 = k_2 .$$

If each of the O-lines of type k_1 has h_1 images, it follows that $h_1 k_1 = n$. Hence

$$k_2 h_1 = m k_1 h_1 = mn = m k_2 h_2 = m^2 k_2$$

and

$$h_1 = m^2 = h .$$

Thus each O-line of type k_1 maps onto L'.

It follows from the fact that lines of π are "cosets" of the O-lines of L that each line of π which is parallel to a line of type k_1 also maps onto L'. Similarly, lines parallel to lines of type k_2 map onto lines of π'.

Note that we obtain a special case of Theorem 6 if $n = m^2$ and $\mathfrak{K}$ is the set of points on an affine subplane of π which contains O and is of order m. In this case $k_2 = m$ and $k_1 = 1$.

Theorem 7. *If L' is a planar loop with $h = m^2$ and the image of each O-line of L is either L' or an O'-line of L', and if Θ is not one to one, then*

(1) *m^2 divides n.*

(2) *If k_1 is defined by $k_1 m^2 = n$, there are $m + 1$ O-lines which contain $k_1 m$ points of $\mathfrak{K}$: all other O-lines contain k_1 points of $\mathfrak{K}$.*

(3) *$k = k_1^2 m^2 = k_1 n$.*

(4) *The image of each line of π is either L' or a line of π'.*

Proof. Let OP and OQ be two distinct O-lines. Since $L' = (OP)\Theta + (OQ)\Theta$, $(OP)\Theta = (OQ)\Theta$ implies that $(OP)\Theta = L'$. If every O-line maps into an O'-line,

then L' contains $n+1$ distinct O'-lines and $h = n^2$. Hence Θ is 1 to 1, contrary to hypotheses.

Let k_1 denote the number of points of $\mathfrak{K}$ on each of the O-lines which map onto L' and let k_2 denote the number of points of $\mathfrak{K}$ on each O-line which maps onto an O'-line. If h_1 and h_2 denote the number of elements in the corresponding images, we have $h = h_1 = m^2$, $h_1 k_1 = n$, so that $k_1 m^2 = n$. The equation $h k = n^2$ then implies that $k = k_1^2 m^2 = k_1 n$.

We also have $h_2 = m$, $h_2 k_2 = n = k_1 m^2$. Hence $k_2 = k_1 m$. Moreover, $k = k_2^2$.

Now let j be the number of O-lines which contain k_2 points of $\mathfrak{K}$, then

$$k_1^2 m^2 = k = j(k_1 m - 1) + (n + 1 - j)(k_1 - 1) + 1$$

and

$$k_1^2 m^2 - n k_1 - k_1 + n = j k_1 (m - 1).$$

Replacing n by $k_1 m^2$

$$k_1^2 m^2 - k_2^2 m^2 - k_1 + k_1 m^2 = j k_1 (m - 1) \quad \text{and} \quad m + 1 = j.$$

We have established (1), (2) and (3). (4) follows as in the previous Theorem.

Theorem 8. *If $k < n$, the image of every O-line is a proper subloop of L'. The images of any two distinct O-lines are two distinct subloops.*

Proof. If $k < n$, $h > n$. Since OP contains n points, it is not possible for $(OP)\Theta$ to be equal to L'. Since $(OP)\Theta = O'$ if and only if $k_P = n$, $(OP)\Theta \neq O'$.

Now suppose that $(OP)\Theta = (OQ)\Theta$. Then each point Q_j is equivalent to some point P_j. This is equivalent to saying that each line $OP + Q_j$ contains a point K_j. Hence $\mathfrak{K}$ must contain at least n elements, which is a contradiction.

Lemma 6. *If L' is associative and OP contains exactly one element of $\mathfrak{K}$, then the mapping $X \to X + P$ is a translation of π for every $P \in OP$.*

Proof. If $k_P = 1$, then $h_P = n$. Thus distinct points on OP have distinct images in L'. We can now define addition on OP so that $(P_i + P_j)\Theta = P_i\Theta + P_j\Theta$. Now for any P_i, P_j and $Q \notin OP$ there exists $\bar{P}$ such that

$$(Q + P_i) + P_j = [Q + (P_i + P_j)] + \bar{P}.$$

Applying Θ and using associativity in L', $\bar{P}\Theta = O'$. Hence $\bar{P} = O$ and

$$(Q + P_i) + P_j = Q + (P_i + P_j).$$

It follows that the mapping $X \to X + P$ carries the set of points on the line $OQ + P_i$ into the set of points on $OQ + (P_i + P)$. All lines parallel to OP are fixed, so the mapping is a translation of π.

Theorem 9. *If L' is associative and $k \leqq n$, then L is associative.*

Proof. If $k < n$, there are at least two O-lines intersecting $\mathfrak{K}$ in the single point O. If P_∞ and Q_∞ denote the points at infinity on OP and OQ respectively, then π is $P_\infty - l_\infty$ and $Q_\infty - l_\infty$ transitive. For a finite plane, this implies that π is a translation plane and that L is associative [3].

4. Concluding Remarks. If L is associative, π is a translation plane. In this case there exists a unique $\overline{L}$ which is isomorphic to the translation group of π. The translation group of a translation plane is always abelian [1]. Thus every subgroup is normal; the translation planes will suffice to give examples of the Theorems in this paper. Moreover, the translation group and its homomorphic images are always vector spaces over Galois fields. Because of the equivalence between vector spaces and affine spaces, this means that the homomorphic images of associative planar half-loops can be interpreted as affine spaces — not necessarily of dimension two.

We have been able to find only one class of examples of non-trivial homomorphisms of non-associative planar half-loops:

Let π be a translation plane coordinatised by a nearfield. Extend π to a projective plane π^* and take the line $x = 0$ as a new line at infinity l'_∞. Let O' denote the intersection of l_∞ with the line $y = 0$. The new planar half-loop constructed with reference to O' and l'_∞ admits a homomorphism with $\mathfrak{K} = l_\infty$. If the nearfield is not a field, π^* is not a translation plane with respect to l'_∞ and the planar half-loop is not associative.

The proof consists essentially in noting that the x coordinate of (a, b) "+" (c, d) depends only upon a and c and that adding a point on l_∞ does not change the x coordinate.

References

[1] J. André, Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954).
[2] R. H. Bruck, Loops with transitive automorphism groups. Pacific J. Math. **1**, 481—483 (1951).
[3] T. G. Ostrom, Planar Half-Loops. Arch. Math. **12**, 151—158 (1961).

Eingegangen am 14. 9. 1961

Anschrift des Autors:
T. G. Ostrom
Department of Mathematics
Washington State University
Pullmann (Wash.), USA

Konstruktion der metrischen Form in der absoluten Geometrie

Von

Rolf Lingenberg

Beim Aufbau der absoluten Geometrie der Ebene steht an wichtiger Stelle die Konstruktion der metrischen Form. Für die in [1] untersuchten metrischen Ebenen wird die metrische Form in [1] bzw. [4] dadurch gewonnen, daß die zugehörige absolute Polarität bzw. die zugehörige absolute Polarinvolution rein synthetisch konstruiert wird. Dabei werden in [1] die Hjelmslevschen Halbdrehungen und in [4] der Höhensatz und der Satz von Desargues verwendet. Das zweite Verfahren ist in [6] dann für einen allgemeineren Bereich von absoluter Geometrie übertragen worden, welcher alle die metrischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$ enthält, welche den Axiomensystemen in [1], [2], [3], [7] genügen, und z. T. auch die metrischen Ebenen enthält, welche durch das Axiomensystem in [5], Teil I gegeben werden. Wir wollen hier nun bei den gleichen Voraussetzungen wie in [6] die Konstruktion der metrischen Form unter weitgehender Verwendung der Methoden der analytischen Geometrie durchführen, wodurch die Schlüsse kürzer und von einem gewissen Standpunkt aus elementarer werden.

Wir erinnern zunächst an die Voraussetzungen in [6].

1. Sei $\mathfrak{P}$ eine projektive Ebene, in welcher der Satz von Pappus-Pascal und das Fano-Axiom gilt und $\mathfrak{T}$ eine *projektiv-metrische Teilstruktur* in $\mathfrak{P}$, also ein Paar $(\mathfrak{m}, \mathfrak{M})$ aus einer Menge $\mathfrak{m}$ von Geraden und einer Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten, für welche eine singuläre oder eine ordinäre Pol-Polarenbeziehung gegeben ist. Dabei verstehen wir unter einer *singulären Pol-Polarenbeziehung* eine nicht eineindeutige Abbildung ψ von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ mit

(*) *Aus* $g \mid h\psi$ *folgt* $g\psi \mid h$ *für alle* g, h *aus* $\mathfrak{m}$.

Eine *ordinäre Pol-Polarenbeziehung* ist ein Paar $\pi = (\psi, \psi^{-1})$ von eineindeutigen Abbildungen von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ und von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{m}$, für welches ψ die Eigenschaft (*) hat. Ist $g \in \mathfrak{m}$, so heißt $g\psi$ der *Pol* der Geraden g und ist $P \in \mathfrak{M}$, so heißt jede Gerade p mit $p\psi = P$ eine *Polare* von P. Im ordinären Fall ist die Polare eines Punktes eindeutig bestimmt, im singulären Fall gibt es Punkte mit mehr als einer Polaren.

Zwei Geraden g, h aus $\mathfrak{T}$ heißen *senkrecht*, wenn g mit dem Pol von h (und damit auch h mit dem Pol von g) inzidiert. Eine eineindeutige Abbildung σ von $\mathfrak{m}$ auf sich, bei welcher in $\mathfrak{P}$ kopunktale Geraden in kopunktale Geraden und zueinander senkrechte Geraden in zueinander senkrechte Geraden übergehen, heißt eine *Spiegelung an der Geraden* g, wenn sie alle Geraden aus $\mathfrak{T}$ durch $g\psi$ festläßt und wenn gilt

(**) $a, a\sigma, g$ *sind kopunktal für alle Geraden* a *aus* $\mathfrak{T}$.

Wir betrachten dann projektiv-metrische Teilstrukturen, welche folgenden Bedingungen genügen:

T 1. *Zu jeder Geraden g aus $\mathfrak{T}$ gibt es wenigstens eine Spiegelung an g.*

T 2. *Die Aufeinanderfolge von Spiegelungen an drei Geraden a, b, c aus $\mathfrak{T}$ ist genau dann eine Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$, wenn a, b, c kopunktal sind.*

T 3. *Es gibt mindestens einen eigentlichen Punkt für $\mathfrak{T}$, und jede Gerade aus $\mathfrak{T}$, welche wenigstens mit einem eigentlichen Punkt inzidiert, inzidiert mindestens mit drei verschiedenen eigentlichen Punkten.*

Dabei nennen wir einen Punkt aus $\mathfrak{P}$ *eigentlich*, wenn alle mit ihm inzidierenden Geraden der Teilstruktur $\mathfrak{T}$ angehören. Wie in [6] gezeigt, gilt dann

Satz 1. *Die durch eine Spiegelung an einer Geraden g aus $\mathfrak{T}$ induzierte Punktabbildung in $\mathfrak{P}$ stimmt mit der involutorischen Homologie*[1]) *mit $g\psi$ als Zentrum und g als Achse überein.*

Da das Produkt dreier involutorischer Homologien, deren Achsen kopunktal sind, nur dann wieder eine involutorische Homologie ist, wenn die Zentren kollinear sind (vgl. etwa [6], (a) im Beweis zu Lemma 7), gilt weiter:

Satz 2. *Sind a, b, c kopunktale Geraden aus $\mathfrak{T}$, so sind ihre Pole kollinear.*

Die folgenden Sätze ergeben sich leicht aus Satz 2 und den Definitionen:

Satz 3. *Die Abbildung ψ der Menge der Geraden einer projektiv-metrischen Teilstruktur $\mathfrak{T}$ auf die Menge ihrer Pole bildet die Menge der Geraden durch einen eigentlichen Punkt P eineindeutig auf die Menge der Punkte einer nicht mit P inzidierenden Geraden ab.*

Satz 4. *Die Punkte einer singulären projektiv-metrischen Teilstruktur $\mathfrak{T}$ sind die sämtlichen Punkte einer Geraden von $\mathfrak{P}$. Haben zwei Geraden aus $\mathfrak{T}$ einen Punkt von $\mathfrak{T}$ gemeinsam, so haben sie denselben Pol.*

Satz 5. *Sind a, b, c drei nicht kopunktale Geraden einer ordinären projektiv-metrischen Teilstruktur, so sind die Pole von a, b, c nicht kollinear.*

2. Mit diesen Kenntnissen wollen wir jetzt unter Verwendung der Methoden der analytischen Geometrie die metrische Form für die projektiv-metrischen Teilstrukturen und damit insbesondere für alle die metrischen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$ herleiten, welche dem Axiomensystem in [5], Teil I genügen und einbettbar sind (vgl. [6], C.).

Die projektive Ebene $\mathfrak{P}$ läßt sich als projektive Koordinatenebene über einem Körper K darstellen. Ist V der dreidimensionale Vektorraum über K, so wird jeder Punkt durch einen eindimensionalen Teilraum P und jede Gerade ebenfalls durch einen eindimensionalen Teilraum G von V gegeben, und die Inzidenz des Punktes mit

---

[1]) Eine Homologie ist eine Kollineation in $\mathfrak{P}$, welche eine Gerade, die Achse, punktweise und einen Punkt, das Zentrum, geradenweise festläßt, wobei Zentrum und Achse nicht inzidieren.

der Geraden durch $xu = 0$ für $x \in P$ und $u \in G$ ausgedrückt, wobei xu das skalare Produkt von x mit u bedeutet. Wir setzen im folgenden $Kx = \{y \mid y = \lambda x$ für $\lambda \in K\}$.

Sei nun E die Menge der Vektoren, welche Geraden aus $\mathfrak{T}$ repräsentieren, samt dem Nullvektor und sei L die Menge der Vektoren, welche Punkte aus $\mathfrak{T}$ repräsentieren, samt dem Nullvektor. Aus $x \in E$ folgt $Kx \subset E$ und entsprechend aus $x \in L$ dann $Kx \subset L$.

Die Pol-Polarenbeziehung ψ ordnet jedem eindimensionalen Teilraum T mit $T \subset E$ genau einen eindimensionalen Teilraum T' mit $T' \subset L$ zu. Diese durch ψ induzierte Abbildung in der Menge der eindimensionalen Teilräume von E bezeichnen wir auch mit ψ. Wir wollen zeigen, daß es eine lineare Abbildung φ von V in sich mit

(1) $$x\varphi \in (Kx)\psi \quad \textit{für alle } x \textit{ aus } E$$

gibt, welche also eine Abbildung in der Menge der eindimensionalen Teilräume induziert, welche auf E mit ψ übereinstimmt.

Wir betrachten dazu „Verfeinerungen" der Abbildung ψ, also eindeutige Abbildungen φ von E auf L mit (1) und

(${}^{*}_{*}$) *Für jeden eindimensionalen Teilraum T in E ist $\varphi \mid T$ eineindeutig und linear.*

Dabei bezeichnet $\varphi \mid T$ die Beschränkung von φ auf T. Allgemein soll $f \mid N$ die Beschränkung der Abbildung f auf eine Teilmenge N der Menge bedeuten, in welcher f erklärt ist.

Sei nun Φ die Menge aller Verfeinerungen von ψ. Offenbar ist Φ nicht leer. Ist $\varphi \in \Phi$ und T ein Teilraum mit $T \subset E$, so ist auch die Abbildung φ' mit

$$x\varphi' = \begin{cases} x\varphi & \text{für} \quad x \notin T \\ \lambda(x\varphi) & \text{für} \quad x \in T \end{cases}$$

für festes $\lambda \neq 0$ aus K ein Element von Φ. Wir sagen, daß φ' durch „lineare Änderung" von φ auf T entsteht. Bezeichnen wir für $\lambda \neq 0$ aus K und $\varphi \in \Phi$ die Abbildung $\bar\varphi$ mit $x\bar\varphi = \lambda(x\varphi)$ für alle x aus E wie üblich mit $\lambda\varphi$, so ist mit φ auch $\lambda\varphi$ ein Element aus Φ.

Wir betrachten nun für festes φ aus Φ die Abbildung h_φ von $V \times E$ in K mit

(2) $$h_\varphi(x, y) = x(y\varphi), \quad x \in V \quad \text{und} \quad y \in E,$$

wobei auf der rechten Seite wieder das Skalarprodukt der Vektoren gemeint ist. Es gilt dann

(3) $$h_\varphi(x + y, z) = h_\varphi(x, z) + h_\varphi(y, z); \quad h_\varphi(\lambda x, y) = \lambda h_\varphi(x, y);$$
$$h_\varphi(x, \lambda y) = \lambda h_\varphi(x, y);$$

(4) *$h_\varphi(x, y) = 0$ für $x, y \neq 0$ aus E ist gleichbedeutend damit, daß x, y Geraden von $\mathfrak{T}$ repräsentieren, welche aufeinander senkrecht stehen, und ist daher gleichbedeutend mit $h_\varphi(y, x) = 0$.*

Ist $h_\varphi \mid E \times E$ symmetrisch, d. h. gilt $h_\varphi(x, y) = h_\varphi(y, x)$ für alle x, y aus E, so ist h_φ auch im zweiten Argument linear, d. h. es gilt

$$h_\varphi(x, y + z) = h_\varphi(x, y) + h_\varphi(x, z) \quad \text{für} \quad x, y, z, y + z \in E.$$

Bei beliebiger Wahl von φ ist $h_\varphi \mid E \times E$ jedoch i. a. nicht symmetrisch.

Nach Satz 1 läßt sich jede Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$ zu einer involutorischen Homologie in $\mathfrak{P}$ fortsetzen. Eine solche läßt sich in der Form

$$x\sigma = -x + 2\frac{x\,z}{a\,z}a$$

darstellen, wobei x eine beliebige Gerade repräsentieren möge und a ein die Achse der Homologie und z ein das Zentrum der Homologie repräsentierender Vektor ist. Ist $\varphi \in \Phi$, so kann offenbar $z = a\varphi$ gesetzt werden, so daß also eine durch eine Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{T}$ induzierte involutorische Homologie in der Form

(5) $$x\sigma = -x + 2\frac{h_\varphi(x, a)}{h_\varphi(a, a)}a, \quad a \in E,$$

dargestellt werden kann.

Seien nun a, b linear unabhängige Vektoren aus E und $c = a + b$, ferner $\sigma, \sigma', \sigma''$ die involutorischen Homologien, welche durch Spiegelungen an durch a, b, c repräsentierte Geraden aus $\mathfrak{T}$ induziert werden, dann gilt nach dem Satz von den drei Spiegelungen (T 2):

$$x\sigma\sigma'\sigma'' = x\sigma''\sigma'\sigma \quad \textit{für alle Vektoren } x.$$

Nach (5) ergibt sich nach einfacher Rechnung für $x = a$ bei beliebiger Wahl von φ aus Φ:

(6) $$h_\varphi(a, b)\, h_\varphi(b, c)\, h_\varphi(c, a) = h_\varphi(b, a)\, h_\varphi(c, b)\, h_\varphi(a, c)\,.$$

Hilfssatz. *Ist T ein zweidimensionaler Teilraum mit $T \subset E$, so gibt es in Φ eine Abbildung φ, so daß $h_\varphi | T \times T$ eine symmetrische Bilinearform vom Rang 2 ist (insbesondere ist $\varphi | T$ eineindeutig und linear).*

Beweis. Seien a, b zwei linear unabhängige Vektoren aus T, welche nicht zueinander senkrechte Geraden $\bar{a}, \bar{b}$ aus $\mathfrak{T}$ repräsentieren, und S der Schnittpunkt von $\bar{a}, \bar{b}$. Dann sind nach Satz 3 $a\varphi$ und $b\varphi$ linear unabhängig für alle φ aus Φ. Wir behaupten, daß es ein φ aus Φ mit

(7) $$(\lambda a + \mu b)\varphi = \lambda(a\varphi) + \mu(b\varphi) \quad \textit{für alle } \lambda, \mu \textit{ aus } K$$

gibt. Offenbar ist dann $\varphi | T$ eineindeutig und linear.

Sei nun φ ein beliebiges Element von Φ. Notfalls durch lineare Änderung von φ in Kb können wir erreichen, daß $h_\varphi(a, b) = h_\varphi(b, a)$ wird. Wir setzen $c = \lambda a + \mu b$, und dürfen annehmen, daß $\lambda, \mu \neq 0$ ist, denn anderenfalls gilt (7) nach $({}^{*}_{*}{}^{*})$.

Nach Satz 2 repräsentieren die Vektoren $a\varphi, b\varphi, c\varphi$ kollineare Punkte. Durch lineare Änderung von φ in Kc, welches von Ka und Kb verschieden ist, können wir erreichen, daß

$$c\varphi = \lambda(a\varphi) + \mu'(b\varphi)$$

wird. (6) ergibt nach leichter Rechnung unter Beachtung von $h_\varphi(a, b) = h_\varphi(b, a) \neq 0$ dann $\mu = \mu'$ oder $h_\varphi(a, a)\, h_\varphi(b, b) - h_\varphi^2(a, b) = 0$. Letzteres ist unmöglich, da sonst der Vektor $d = h_\varphi(a, b)\, a - h_\varphi(a, a)\, b$ eine Gerade $\bar{d}$ durch den Punkt S repräsentierte, welche wegen $d(a\varphi) = h_\varphi(d, a) = 0$ und $d(b\varphi) = h_\varphi(d, b) = 0$ mit den Polen von $\bar{a}, \bar{b}$ inzidiert, was Satz 3 widerspricht. Also gilt (7) und damit der Hilfssatz,

denn wegen der Linearität von $\varphi | T$ hat $h_\varphi(a, b) = h_\varphi(b, a)$ zur Folge $h_\varphi(x, y) = h_\varphi(y, x)$ für alle x, y aus T.

3. Mit dem Hilfssatz können wir nun sofort die metrische Form im singulären Fall gewinnen: Nach Satz 4 ist die Menge $\mathfrak{M}$ der Punkte einer singulären projektiv-metrischen Teilstruktur eine Punktreihe. Sei U der dieser Punktreihe entsprechende Teilraum und T ein zweidimensionaler Teilraum mit $T \subset E$ (einen solchen gibt es nach T 3). Es ist $V = T \oplus U$. Nach dem Hilfssatz gibt es dann ein φ aus Φ, so daß $h_\varphi | T \times T$ eine symmetrische Bilinearform ist.

Sei nun x ein beliebiger Vektor aus E. Dann gibt es ein $y \neq o$ aus T, so daß $x - y \in U$ gilt. Die durch x, y repräsentierten Geraden haben damit einen Punkt von $\mathfrak{M}$ gemeinsam, also nach Satz 4 denselben Pol. Notfalls nach linearer Änderung von φ in Kx kann man erreichen, daß

$$x\varphi = y\varphi \tag{8}$$

wird. Setzt man $x\varphi = o$ für alle x mit $x \in U$ fest und $x\varphi$ für alle x mit $x \notin U$, E gemäß (8) fest, wobei y der eindeutig existierende Vektor aus T mit $x - y \in U$ ist, so entsteht eine lineare Abbildung von V in sich, für welche (1) gilt. Die Form

$$f(x, y) = x(y\varphi) \quad \text{für alle Vektoren } x, y$$

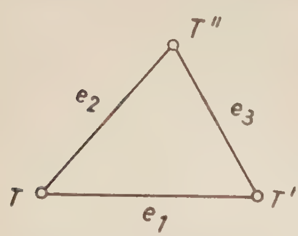
ist dann eine symmetrische Bilinearform vom Rang 2, denn die Symmetrie von f ergibt sich, wenn wir $x = t + u$ und $y = t' + u'$ mit $t, t' \in T$ und $u, u' \in U$ setzen, wegen der Linearität von φ und der Symmetrie von $f | T \times T$ aus

$$f(x, y) = f(t + u, t' + u') = f(t, t') = f(t', t) = f(t' + u', t + u) = f(y, x).$$

Die durch die Bilinearform f in V gegebene Orthogonalität stimmt nach (4) in E mit derjenigen überein, welche durch das Senkrechtstehen in der projektiv-metrischen Teilstruktur induziert wird. f ist also die metrische Form für die singuläre projektiv-metrische Teilstruktur.

4. Wir wenden uns nun dem ordinären Fall zu. Wir wählen drei zweidimensionale Teilräume T, T', T'' mit $T \cap T' \cap T'' = \{o\}$ und $T, T', T'' \subset E$. Die Existenz solcher Teilräume sichert T 3.

Nach dem Hilfssatz gibt es Abbildungen $\varphi, \varphi', \varphi''$ aus Φ, so daß $h_\varphi | T \times T$ und $h_{\varphi'} | T' \times T'$ und $h_{\varphi''} | T'' \times T''$ symmetrische Bilinearformen vom Rang 2 sind. Wegen (1) und $({}^{*}_{*})$ und der Tatsache, daß mit $h_\varphi | T \times T$ auch $h_{\lambda\varphi} | T \times T$ für $\lambda \neq 0$ aus K eine symmetrische Bilinearform vom Rang 2 ist, können wir annehmen, daß



$$\varphi | T \cap T' = \varphi' | T \cap T' \quad \text{und} \quad \varphi' | T' \cap T'' = \varphi'' | T' \cap T''$$

gilt. Dann definiert

$$x\bar{\varphi} = \begin{cases} x\varphi & \text{für } x \in T \\ x\varphi' & \text{für } x \in T' \\ x\varphi'' & \text{für } x \in E \setminus (T \cup T')\ ^{2)} \end{cases}$$

[2]) $A \setminus B$ für Mengen A, B bezeichnet die Menge der Elemente x mit $x \in A$ und $x \notin B$.

eine Abbildung aus Φ, für welche $h_{\bar{\varphi}} | T \times T$ und $h_{\bar{\varphi}} | T' \times T'$ symmetrische Bilinearformen vom Rang 2 sind. Wir behaupten, daß wir durch lineare Änderung von $\bar{\varphi}$ in Teilräumen aus $E \setminus (T \cup T')$ erreichen können, daß $h_{\bar{\varphi}} | E \times E$ symmetrisch wird.

Wir wählen dazu Vektoren $e_1, e_2, e_3 \neq o$ mit $e_1 \in T \cap T'$ und $e_2 \in T \cap T''$ und $e_3 \in T' \cap T''$. Für jeden Vektor x gibt es dann eine eindeutige Darstellung

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K. \tag{9}$$

Ist $x \in T$ oder $x \in T'$, also $\lambda_3 = 0$ oder $\lambda_2 = 0$, so folgt, da $\bar{\varphi} | T$ und $\bar{\varphi} | T'$ linear sind,

$$x\bar{\varphi} = \lambda_1(e_1\bar{\varphi}) + \lambda_2(e_2\bar{\varphi}) + \lambda_3(e_3\bar{\varphi}). \tag{10}$$

Sei nun $x \in E \setminus (T \cup T')$. Dann können wir durch lineare Änderung von $\bar{\varphi}$ in Kx erreichen, daß

$$x\bar{\varphi} = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)\bar{\varphi} + \lambda_3'(e_3\bar{\varphi}) \tag{11}$$

wird, denn es gilt $x, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, e_3 \in E$, und somit sind die Vektoren $x\bar{\varphi}, (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)\bar{\varphi}, e_3\bar{\varphi}$ nach Satz 2 linear abhängig. Aus entsprechenden Gründen gibt es λ, μ aus K mit

$$x\bar{\varphi} = \lambda(e_2\bar{\varphi}) + \mu((\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3)\bar{\varphi}). \tag{12}$$

Da $\bar{\varphi} | T$ und $\bar{\varphi} | T'$ linear sind, ergibt sich weiter

$$x\bar{\varphi} = \lambda_1(e_1\bar{\varphi}) + \lambda_2(e_2\bar{\varphi}) + \lambda_3'(e_3\bar{\varphi}) = \mu\lambda_1(e_1\bar{\varphi}) + \lambda(e_2\bar{\varphi}) + \mu\lambda_3(e_3\bar{\varphi}), \tag{13}$$

mithin für $\lambda_1 \neq 0$, also $x \notin T''$ wegen der nach Satz 5 geltenden linearen Unabhängigkeit von $e_1\bar{\varphi}, e_2\bar{\varphi}, e_3\bar{\varphi}$ dann $\lambda_3' = \lambda_3$, also (10) für $x\bar{\varphi}$.

Ist jedoch $\lambda_1 = 0$, also $x \in T''$, und $\lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, so setzen wir $e_2' = e_1 + e_2$ und erhalten für $x = -\lambda_2 e_1 + \lambda_2 e_2' + \lambda_3 e_3$ mit entsprechenden Schlüssen wie eben, daß notfalls nach linearer Änderung

$$x\bar{\varphi} = -\lambda_2(e_2\bar{\varphi}) + \lambda_2(e_2'\bar{\varphi}) + \lambda_3(e_3\bar{\varphi}),$$

also wegen $e_2'\bar{\varphi} = e_1\bar{\varphi} + e_2\bar{\varphi}$ dann ebenfalls (10) gilt.

Mithin ist $\bar{\varphi} | E$ linear und — da sich $\bar{\varphi}$ und φ'' auf T'' nur um einen Faktor unterscheiden können — auch $h_{\bar{\varphi}} | T'' \times T''$ eine symmetrische Bilinearform vom Rang 2. Also gilt

$$h_{\bar{\varphi}}(e_1, e_2) = h_{\bar{\varphi}}(e_2, e_1); \quad h_{\bar{\varphi}}(e_1, e_3) = h_{\bar{\varphi}}(e_3, e_1); \quad h_{\bar{\varphi}}(e_2, e_3) = h_{\bar{\varphi}}(e_3, e_2), \tag{14}$$

mithin nach (10), daß $h_{\bar{\varphi}} | E \times E$ symmetrisch ist. Definieren wir nun $\bar{\varphi}$ gemäß (10) für alle Vektoren x, so entsteht eine eineindeutige lineare Abbildung von V auf sich, welche die Eigenschaft (1) hat. Die Form

$$f(x, y) = x(y\bar{\varphi}) \quad \text{für alle Vektoren } x, y$$

ist dann wegen (10) und (14) eine symmetrische Bilinearform vom Rang 3. Die durch diese Bilinearform in V gegebene Orthogonalität stimmt nach (4) in E mit derjenigen überein, welche durch das Senkrechtstehen in der projektiv-metrischen Teilstruktur induziert wird.

Damit ist die metrische Form auch im ordinären Fall gewonnen.

Literaturverzeichnis

[1] F. Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Springer-Verlag 1959.
[2] H. Karzel, Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie. Arch. Math. **6**, 66—76 (1955).
[3] H. Karzel, Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien. Arch. Math. **6**, 284—295 (1955).
[4] R. Lingenberg, Begründung der absoluten Geometrie der Ebene. Diss. Kiel 1955.
[5] R. Lingenberg, Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. I, II, III. Math. Ann. **137**, 26—41 (1959); **137**, 83—106 (1959); **142**, 184—224 (1961).
[6] R. Lingenberg, Einbettung projektiv-metrischer Teilstrukturen in projektiv-metrische Ebenen. Math. Z. **74**, 367—386 (1960).
[7] E. Sperner, Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik. Arch. Math. **5**, 458—468 (1954).

Eingegangen am 22. 9. 1961

Anschrift des Autors:
Rolf Lingenberg
Hannover
Böhmerstraße 37

Eine Ungleichung für die Dichte von Lagerungen konvexer Körper*)

Von

Helmut Groemer

Im folgenden bedeute K stets einen n-dimensionalen symmetrischen konvexen Körper, d. h. eine kompakte konvexe Punktmenge des Euklidischen n-dimensionalen Raumes R_n, die einen inneren Punkt als Mittelpunkt hat. Ist $\{K_i\}$ eine Menge von zu K translationsgleichen Körpern und haben je zwei K_i höchstens Randpunkte gemeinsam, so heiße $\{K_i\}$ eine Lagerung. Bilden außerdem die Mittelpunkte der K_i ein Punktgitter, so heiße die Lagerung gitterförmig. Bekanntlich (vgl. [1] oder [2]) wird bei einer Lagerung jedes K_i von nicht mehr als $3^n - 1$ anderen Körpern der Lagerung berührt. Die Zahl $3^n - 1$ wird nur dann für alle K_i erreicht, wenn die Lagerung die Dichte 1 hat.

Liegt nun eine Lagerung $\{K_i\}$ vor, die die Eigenschaft hat, daß jedes K_i von etwa μ anderen Körpern aus $\{K_i\}$ berührt wird, so kann man vermuten, daß die Dichte der Lagerung verhältnismäßig groß sein muß, wenn μ nahe bei $3^n - 1$ liegt. Im folgenden sollen diesbezüglich einige präzise Aussagen gemacht werden.

Es werden zunächst gitterförmige Lagerungen betrachtet. Ist $V(K)$ das Volumen von K und D das Volumen des Fundamentalparallelotops des Gitters, so läßt sich die Dichte δ der Lagerung einfach durch

$$\delta = \frac{V(K)}{D}$$

definieren. Die obere Grenze δ_0 der Dichten aller gitterförmigen Lagerungen von zu K translationsgleichen Körpern heiße die Lagerungskonstante von K. Es läßt sich nun der folgende Satz formulieren:

Satz 1. *Es sei K ein symmetrischer konvexer Körper mit der Lagerungskonstanten δ_0 und es liege eine gitterförmige Lagerung von zu K translationsgleichen Körpern vor. Die Dichte δ der Lagerung erfülle die Bedingung $\delta > \frac{1}{3}\delta_0$. Wird jeder Körper von μ anderen Körpern derselben Lagerung berührt, so gilt*

$$\delta \geqq \frac{1}{3^n - \mu}. \tag{1}$$

Bemerkung. Der Satz kann insbesondere dann angewendet werden, wenn es sich um eine dichteste Lagerung ($\delta = \delta_0$) handelt. In diesem Falle kann man den Satz

---

*) Die Ausführung dieser Arbeit wurde durch einen Research Grant (NSF-G14233) der National Science Foundation unterstützt.

mittels der in der Geometrie der Zahlen gebräuchlichen Begriffe so ausdrücken: Liegen auf dem bezüglich eines Gitterpunktes symmetrischen konvexen Körpers K μ Gitterpunkte eines kritischen Gitters, so gilt für die kritische Deteminante Δ von K

$$\Delta \leq \frac{3^n - \mu}{2^n} V(K).$$

Um eine zu (1) analoge Ungleichung auch für nicht gitterförmige Lagerungen beweisen zu können, seien folgende Definitionen und Bezeichnungen eingeführt. Ist $\{K_i\}$ die gegebene Lagerung, so werde mit $\nu(K_s)$ die Anzahl derjenigen $K_j \in \{K_i\}$ bezeichnet, die K_s berühren. W_λ sei der Würfel der Kantenlänge λ, mit Seitenflächen senkrecht zu den Koordinatenachsen und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. $N(\lambda)$ bedeute die Anzahl aller K_i mit $K_i \subset W_\lambda$. Unter der mittleren Berührungszahl $\bar{\mu}$ von $\{K_i\}$ soll der Ausdruck

$$\bar{\mu} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\sum\limits_{K_i \subset W_\lambda} \nu(K_i)}{N(\lambda)}$$

verstanden werden. Die Dichte $\bar{\delta}$ der Lagerung sei durch

$$\bar{\delta} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{V(K)\, N(\lambda)}{\lambda^n}$$

erklärt. Es werde stets vorausgesetzt, daß $\bar{\mu}$ und $\bar{\delta}$ existieren. Bei gitterförmigen Lagerungen stimmen natürlich $\bar{\mu}$ und μ sowie $\bar{\delta}$ und δ überein. Schließlich soll noch die Lagerung $\{K_i\}$ gesättigt genannt werden (vgl. L. FEJES TOTH [3]), wenn es nicht möglich ist, einen zu K translationsgleichen Körper zu finden, der kein K_i überlappt. Es gilt dann

Satz 2. *Für eine gesättigte Lagerung mit der Dichte $\bar{\delta}$ und der mittleren Berührungszahl $\bar{\mu}$ gilt*

$$\bar{\delta} \geq \frac{1}{3^n - \bar{\mu}}. \tag{2}$$

Bemerkung. Beim Beweis dieses Satzes wird sich zeigen, daß (2) auch dann noch richtig ist, wenn es nicht möglich ist, unendlich viele einander nicht überlappende zu $2K$ translationsgleiche Körper zu finden, die kein K_i überlappen.

Beweis von Satz 1. Das Gitter der Mittelpunkte aller K_i werde mit Γ bezeichnet. Ist $X \in R_n$, so werde mit $d_i(X)$ die zu K_i gehörige Distanzfunktion bezeichnet. Jedem K_i kann man eine „Zelle" Z_i zuordnen; sie besteht aus allen Punkten X mit der Eigenschaft, daß für alle j mit $j \neq i$ $d_i(X) \leq d_j(X)$ gilt. Es ergibt sich unmittelbar, daß alle Z_i den R_n lückenlos und ohne einander zu überlappen ausfüllen. Der Mittelpunkt von K_i sei P_i. Es werde $K_1 = K$, $P_1 = P =$ Koordinatenursprung angenommen und $Z_1 = Z$, $d_1(X) = d(X)$ gesetzt. Ist $V(Z)$ das Volumen von Z (aus der Stetigkeit von $d(X)$ folgt leicht, daß dieses existiert), so gilt für die Dichte δ der Lagerung offenbar

$$\delta = \frac{V(K)}{V(Z)}. \tag{3}$$

Es soll zunächst gezeigt werden, daß unter den im Satz 1 gegebenen Voraussetzungen

$$Z \subset 3K \tag{4}$$

gilt. Den Beweis dieser Beziehung kann man mittels einer von C. A. Rogers [4] stammenden Idee folgendermaßen führen.

Es sei Q ein Punkt mit den Eigenschaften

$$Q \in Z \tag{5}$$

und

$$d(Q) = \sup_{X \in Z} d(X). \tag{6}$$

Es reicht dann hin

$$d(Q) \leqq 3 \tag{7}$$

zu beweisen. Da Z einen Fundamentalbereich für das Gitter Γ enthält, gibt es einen Gitterpunkt P^+, für den $3Q - P^+ \in Z$ ist. Es gilt dann wegen (6)

$$d(3Q - P^+) \leqq d(Q)$$

oder

$$d\left(Q - \frac{1}{3} P^+\right) \leqq \frac{1}{3} d(Q). \tag{8}$$

Wird mit Γ^+ die Menge aller Punkte der Form

$$P_i, P_i \pm \frac{1}{3} P^+ \tag{9}$$

bezeichnet, so erkennt man ohne weiteres, daß Γ^+ ein Gitter der Determinante $\frac{1}{3} D$ ist. (Man beachte, daß zwar $P^+ \in \Gamma$ ist, aber nicht $\frac{1}{3} P^+ \in \Gamma$ sein kann. Denn wäre etwa $\frac{1}{3} P^+ = - P_i \in \Gamma$, so folgte aus $Q + P_i \subset Z_i$, der Definition von Z_i und aus (8) $d_i(Q + P_i) \leqq d(Q + P_i) \leqq \frac{1}{3} d(Q) < d(Q)$. Da K und K_i translationsgleich sind, müßte aber $d_i(Q + P_i) = d(Q)$ sein.) Für die Punkte (9) findet man, wenn $P_i \neq P$ ist, wegen (8) und wegen $d(P_i \pm Q) \geqq d_i(P_i \pm Q) = d(\pm Q) = d(Q)$

$$d(P_i) \geqq 2,$$

$$d\left(P_i \pm \frac{1}{3} P^+\right) \geqq d(P_i \pm Q) + d\left(Q - \frac{1}{3} P^+\right) \geqq d(Q) - \frac{1}{3} d(Q) = \frac{2}{3} d(Q). \tag{10}$$

Wäre nun $d(Q) > 3$, so müßte nach (10) für alle $X \in \Gamma^+$

$$d(X) \geqq 2$$

sein und man könnte eine gitterförmige Lagerung von zu K translationsgleichen Körpern, deren Mittelpunkte die Punkte von Γ^+ sind, aufbauen, so daß für die Dichte δ^+ der Lagerung, entgegen der Voraussetzung des Satzes,

$$\delta_0 \geqq \delta^+ \geqq 3\delta$$

wäre. Somit muß (7) gelten.

Es werde jetzt angenommen, daß K von den Körpern $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_\mu}$ der

Lagerung berührt wird. Weil aus $Y \in K_{i_\sigma}$

$$d(Y) \leqq d(P_{i_\sigma}) + d_{i_\sigma}(Y) \leqq 2 + 1 = 3$$

folgt, gilt

(11) $$K_{i_\sigma} \subset 3K \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Aus (4) und (11) ergibt sich

$$V(Z) + \sum_{\sigma=1}^{\mu} V(K_{i_\sigma}) \leqq 3^n V(K)$$

und daraus erhält man wegen (3) und wegen $V(K_{i_\sigma}) = V(K)$ die zu beweisende Ungleichung (1) in der Form

$$\frac{1}{\delta} + \mu \leqq 3^n.$$

Beweis von Satz 2. Wie beim Beweis von Satz 1 definiere man die zu K_i gehörige Zelle Z_i. Es ist wieder $Z_i \subset 3K_i$. Denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt Q mit $Q \in Z_i - 3K_i$. Q hätte aber dann von allen Mittelpunkten P_i einen (Minkowskischen) Abstand $\geqq 3$ und man könnte Q zum Mittelpunkt eines zu K translationsgleichen Körpers machen, der kein K_i überlappt. Die Lagerung wäre daher nicht gesättigt. Entsprechend wie bei den gitterförmigen Lagerungen hat man daher

(12) $$V(Z_i) + \nu(K_i)\, V(K) \leqq 3^n V(K_i).$$

Beachtet man, daß wegen $Z_i \subset 3K_i$ die Z_i gleichmäßig beschränkt sind, so ergibt sich, wenn $\sum$ die Summation über alle i mit $K_i \subset W_\lambda$ andeutet,

(13) $$\sum V(Z_i) = \lambda^n + o(\lambda^n).$$

Aus (12) und (13) erhält man

$$\lambda^n + \sum \nu(K_i)\, V(K) \leqq 3^n \sum V(K_i) + o(\lambda^n).$$

Für $\lambda \to \infty$ folgt daraus, wenn man zuvor durch $N(\lambda)\, V(K)$ dividiert,

$$\frac{1}{\delta} + \bar{\mu} \leqq 3^n,$$

womit (2) bewiesen ist.

Literaturverzeichnis

[1] H. Hadwiger, Über Treffanzahlen bei translationsgleichen Eikörpern. Arch. Math. 8, 212 bis 213 (1957).
[2] H. Groemer, Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper, die einen konvexen Körper berühren. Monatsh. Math. **65**, 74—81 (1961).
[3] L. Fejes Toth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin 1953.
[4] C. A. Rogers, A note on coverings and packings. J. London Math. Soc. **25**, 327—331 (1950).

Eingegangen am 24. 7. 1961

Anschrift des Autors:
Helmut Groemer
Department of Mathematics
Oregon State University
Corvallis (Ore.), U.S.A.

KOWALSKY **Topologische Räume**

Von Prof. Dr. H.-J. Kowalsky, Professor an der Universität Erlangen
271 Seiten, Preis Fr./DM 40,—

Mathematische Reihe, Band 26, Sammlung „Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften"

Inhalt: I. Grundlagen: Mengen, Verbände, Filter. II. Topologische Räume: Zusammenhang zwischen Topologie und Grenzwert, Grundbegriffe, Trennungseigenschaften, Mächtigkeitsbedingungen. III. Kompaktheit und Zusammenhang (einschließlich lokaler Begriffe und parakompakter Räume). IV. Abbildungen: Stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen, Homöomorphie, vollständig reguläre Räume, Quotienten-, Produkt-, Summen- und Abbildungsräume. V. Erweiterung und Kennzeichnung topologischer Räume: Allgemeines Erweiterungsprinzip, Kompaktifizierung, Einbettungs- und Darstellungssätze. VI. Metrische und uniforme Räume: Metrisierung, Gleichmäßigkeit, Vervollständigung. VII. Topologische Gruppen, Anwendungen: Grundbegriffe aus der Theorie der topologischen Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume, Approximationssatz von Stone-Weierstrass, induktiver und inverser Limes.
Das vorliegende Lehrbuch soll in die mengentheoretische Topologie einführen. Ausgangspunkt ist eine Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffs, die einen natürlichen Zugang zu den topologischen Räumen vermittelt. Kennzeichnend für die Darstellung ist die weitgehende Verwendung der Filter, die nicht nur eine übersichtliche Schreibweise und Begriffsbildung, sondern auch eine formale Beweisführung ermöglichen. Die Stoffauswahl wird durch Hinweise und Aufgaben am Ende eines jeden Paragraphen ergänzt.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung — Obtainable from your bookseller — Commandes à votre libraire

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart

Soviet Mathematics — Doklady

A Translation of all the Pure Mathematics Sections
of Doklady Akademii Nauk SSSR

The total number of pages of the Russian journal to be translated in 1962 will be about 1750. All branches of Pure Mathematics are covered in the Doklady in short articles which provide a comprehensive, up-to-date report of what is going on in Soviet mathematics

Six Issues a year Domestic Subscriptions $ 17.50
Foreign Subscriptions $ 20.00
Single Issues $ 5.00

Send Orders to

American Mathematical Society

190 Hope Street, Providence 6, Rhode Island

Demnächst erscheint:

ISNM Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik
International Series for Numerical Mathematics
Vol. 3

Colloquium über Schaltkreis- und Schaltwerk-Theorie

vom 26. – 28. Oktober 1960 in Bonn
Rheinisch-Westfälisches Institut für Instrumentelle Mathematik

(1961) 198 Seiten. Ganzleinen Fr./DM 20,–

Vortrags-auszüge

H. Rohleder, Technische Hochschule Dresden (Inst. für Maschinelle Rechentechnik)
Über die Synthese von Reihenparallelschaltungen bei unvollständig gegebenen Arbeitsbedingungen.

G. Häuslein, IBM Deutschland, Sindelfingen
I. P. Roth's Methode der kubischen Komplexe zur Minimisierung von Schaltfunktionen.

G. Hotz, Telefunken GmbH., Konstanz
Zur Reduktion von Systemen von Schaltkreispolynomen.

C. Hackel, IBM Deutschland, Sindelfingen
Zur Synthese von minimalen NOR-Schaltkreisen.

J. Eeander, Universität Saarbrücken (Inst. für Angewandte Mathematik)
Der Äquivalenzkalkül von Th. Fromme.

K. H. Böbling, Universität Bonn (Inst. für Angewandte Mathematik)
Zur Reduktion von Schaltwerken.

H. Deussen, Universität Mainz (Inst. für Angewandte Mathematik)
Synthese von Automata.

W. Zoberbier, Telefunken GmbH., Konstanz
Die praktische Anwendung von Minimisierungsverfahren in der Systemplanung von Schaltkreisen und Schaltwerken.

W. H. Rein, Techn. Hochschule Darmstadt (Inst. für Prakt. Mathematik)
Schaltwerke mit mehrwertigen zeitabhängigen Veränderlichen.

W. Händler, Universität Saarbrücken (Inst. für Angewandte Mathematik)
Zum Gebrauch von Graphen in der Schaltkreis- und Schaltwerktheorie.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung — Obtainable from your bookseller

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart